

Kapitel 3

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns ausführlich mit der Herleitung und Anwendung von Rechenverfahren, die auf dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* beruhen. Die Anwendungen sind dabei ungeheuer vielfältig und für den in der Berechnungspraxis tätigen Ingenieur von sehr großer Bedeutung. Fokussieren wollen wir uns hier zunächst auf die *Ermittlung von Kraftgrößen* sowie von *Einflusslinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Systeme*. Zudem werden wir erarbeiten, wie das Prinzip der virtuellen Verrückungen genutzt werden kann, um eindeutig *Differentialgleichungen und Randbedingungen* für statische Problemstellungen an Stäben und Balken herzuleiten.

3.2 Virtuelle Verrückungen und virtuelle Arbeiten

3.2.1 Virtuelle Verrückungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei der in Abb. 3.1 gezeigte exemplarische Balken, der beispielsweise unter einer beliebig aber stetig verteilten Streckenlast $q(x)$ stehe. Der Balken der Länge l sei am linken Ende zweiwertig und am rechten Ende einwertig gelagert. Die

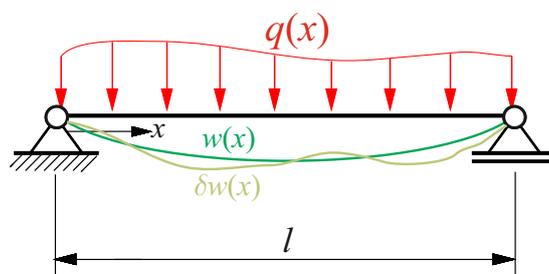


Abb. 3.1: Gleichgewichtskonfiguration $w(x)$ eines Balkens und zulässige virtuelle Verrückungen $\delta w(x)$.

sich unter der gegebenen Belastung einstellende Durchbiegung im Gleichgewichtszustand

sei mit $w(x)$ bezeichnet. Zusätzlich dazu wollen wir eine *infinitesimale Variation* δw aus der Gleichgewichtslage betrachten, die ebenfalls in Abb. 3.1 gezeigt ist. Diese Variation δw wollen wir im Weiteren als *virtuelle Verrückung* bezeichnen.

An virtuelle Verrückungen werden die folgenden Anforderungen gestellt. Virtuelle Verrückungen...

- ...werden als *infinitesimal klein* angenommen.
- ...sind *gedacht* und existieren *nicht real*.
- ...müssen mit den gegebenen geometrischen *Randbedingungen im Einklang* stehen.

Am in Abb. 3.1 gezeigten Beispiel bedeutet der letzte Punkt, dass die virtuellen Verrückungen δw in den beiden Auflagerpunkten zwingend verschwinden müssen, d.h. $\delta w(x=0) = 0$ und $\delta w(x=l) = 0$.

An dem in Abb. 3.2 gezeigten Kragbalken wird dies weiter illustriert. Der Balken stehe

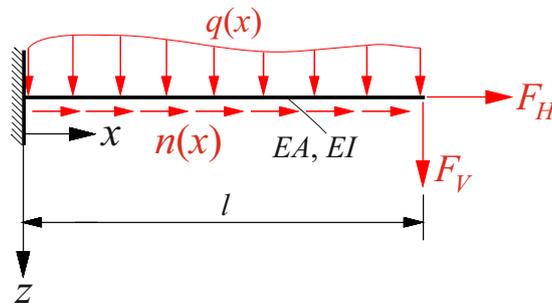


Abb. 3.2: Kragbalken unter Belastung.

unter den beiden Streckenlasten $q(x)$ und $n(x)$ und sei zusätzlich dazu an seinem freien Ende durch die beiden Einzelkräfte F_H und F_V beansprucht. Die geometrischen Randbedingungen lauten in diesem Falle:

$$w(x=0) = 0, \quad w'(x=0) = 0, \quad u(x=0) = 0. \quad (3.1)$$

Zusätzlich sind am freien Kragarmende die folgenden dynamischen Randbedingungen vorgegeben:

$$Q(x=l) = F_V, \quad N(x=l) = F_H, \quad M(x=l) = 0. \quad (3.2)$$

Jede infinitesimale Variation / virtuelle Verrückung δu und δw , die die gegebenen geometrischen Randbedingungen (3.1) erfüllt, ist demnach zulässig. Beispielsweise könnten am konkreten Beispiel Ansätze der Form $\delta u(x) = C_1x + C_2x^2 + \dots$ und $\delta w(x) = D_1x^2 + D_2x^3 + \dots$ in Frage kommen, die offenbar alle gegebenen geometrischen Randbedingungen erfüllen.

3.2.2 Virtuelle Arbeiten

An dieser Stelle wollen wir den Begriff der *virtuellen Arbeiten* prägen: Eine gegebene Struktur, die sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, wird virtuell ausgelenkt. Dabei ändern sich die inneren und äußeren Kräfte und Spannungen nicht, und sie leisten entlang der virtuellen Verrückungen virtuelle Arbeiten. Hierbei wird unterschieden zwischen

den *virtuellen inneren Arbeiten* δW_i und den *virtuellen äußeren Arbeiten* δW_a . Im Falle einer an einem Festkörper angreifenden Einzelkraft F und einer am Kraftangriffspunkt aufgeprägten virtuellen Verschiebung δu würde die virtuelle äußere Arbeit $\delta W_a = F\delta u$ lauten, bzw. in vektorieller Schreibweise $\delta W_a = \underline{F}\delta \underline{u}$.

Starrer Balken

Ein einfaches Beispiel wird in Abb. 3.3 gezeigt. Gegeben sei eine Wippe, die durch die drei Einzellasten F_V (Abstand a_V vom Auflagerpunkt), F_S (Abstand a_S) und F_T (Abstand a_T) belastet werde. Die Wippe sei ideal starr, so dass sich aufgrund der Belastungen keinerlei Verformungen ergeben und somit die virtuelle innere Arbeit δW_i zu null wird. Jedoch leisten die Kräfte F_V , F_S und F_T virtuelle äußere Arbeiten, die sich aus der virtuellen Verrückungen ihrer Angriffspunkte ergeben.

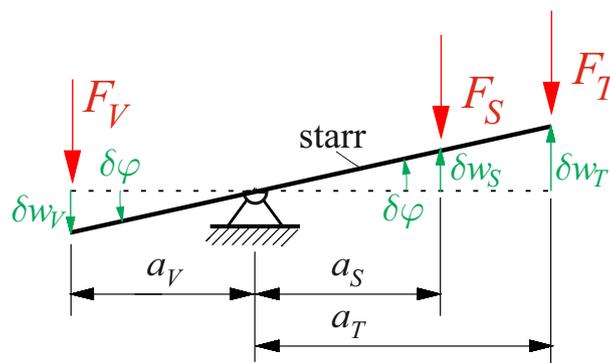


Abb. 3.3: Kinematik der Wippe.

Sei nun die virtuelle Verdrehung $\delta\varphi$ aufgebracht worden. Aufgrund dieser virtuellen Verdrehung erleiden die Kraftangriffspunkte die virtuellen Verrückungen δw_V , δw_S und δw_T . Die geleistete virtuelle Arbeit δW reduziert sich dann auf die virtuelle äußere Arbeit δW_a und lautet:

$$\delta W = \delta W_a = F_V \delta w_V - F_S \delta w_S - F_T \delta w_T. \quad (3.3)$$

Die negativen Vorzeichen bei den Anteilen aus F_S und F_T rühren daher, dass diese beiden Kräfte entgegen ihrer Wirkungsrichtung verschoben werden.

Die *Kinematik*, d.h. die Zusammenhänge zwischen der virtuellen Verdrehung $\delta\varphi$ und den virtuellen Verschiebungen δw_V , δw_S und δw_T , ergibt sich aus elementaren geometrischen Betrachtungen unter Beachtung der Erfordernis, dass die virtuellen Verschiebungen sämtlich infinitesimal klein sein. Man kann an Abb. 3.3 unmittelbar Folgendes ablesen:

$$\delta w_V = \delta\varphi a_V, \quad \delta w_S = \delta\varphi a_S, \quad \delta w_T = \delta\varphi a_T. \quad (3.4)$$

Die geleistete virtuelle Arbeit $\delta W = \delta W_a$ ergibt sich dann als:

$$\delta W = \delta W_a = (F_V a_V - F_S a_S - F_T a_T) \delta\varphi. \quad (3.5)$$

Euler-Bernoulli-Balken

Nach diesem recht elementaren Beispiel wollen wir erneut den Kragbalken der Abb. 3.2 betrachten. Gesucht werden auch hier die geleisteten virtuellen Arbeiten, wobei hier neben

der virtuellen äußeren Arbeit δW_a auch die virtuelle innere Arbeit δW_i hinzukommt. Mit den kinematischen Randbedingungen (3.1) ist es zwingend notwendig, dass die virtuellen Verschiebungen δu und δw die Bedingungen $\delta u(x=0) = 0$, $\delta w(x=0) = 0$ und $\delta w'(x=0) = 0$ erfüllen.

Wenden wir uns zunächst der virtuellen äußeren Arbeit δW_a zu. Die beiden Einzellasten F_H und F_V leisten virtuelle Arbeiten entlang der ihnen zugeordneten virtuellen Verschiebungen $\delta u(x=l)$ bzw. $\delta w(x=l)$. Die Streckenlast $q(x)$ ist stetig über x verteilt, daher ist sie, multipliziert mit der virtuellen Verrückung $\delta w(x)$, über die gesamt Stablänge zu integrieren. Gleiches gilt auch für die Streckenlast $n(x)$. Man erhält also:

$$\delta W_a = \int_0^l q(x)\delta w dx + \int_0^l n(x)\delta u dx + F_V\delta w(x=l) + F_H\delta u(x=l). \quad (3.6)$$

Die virtuelle innere Arbeit δW_i lässt sich aus der virtuellen Verzerrungsenergiedichte δU_0 berechnen:

$$\delta W_i = \int_V \delta U_0 dV = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_0^l \int_A \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} dA dx. \quad (3.7)$$

Mit dem bereits bekannten kinematischen Zusammenhang zwischen der Dehnung ε_{xx} und den beiden Verschiebungen u und w

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.8)$$

kann ein äquivalenter Ausdruck für die virtuelle Dehnung $\delta\varepsilon_{xx}$ angegeben werden:

$$\delta\varepsilon_{xx} = \frac{d\delta u}{dx} - z \frac{d^2\delta w}{dx^2}. \quad (3.9)$$

Somit erhält man dann für die virtuelle innere Arbeit δW_i :

$$\delta W_i = \int_0^l \int_A \sigma_{xx} \left(\frac{d\delta u}{dx} - z \frac{d^2\delta w}{dx^2} \right) dA dx. \quad (3.10)$$

Mit den Schnittgrößendefinitionen $N = \int_A \sigma_{xx} dA$ und $M = \int_A \sigma_{xx} z dA$ erhält man nach Integration über die Querschnittsfläche A :

$$\delta W_i = \int_0^l \left(N \frac{d\delta u}{dx} - M \frac{d^2\delta w}{dx^2} \right) dx. \quad (3.11)$$

Man beachte dabei, dass an dieser Stelle noch keinerlei Aussagen über das Werkstoffverhalten getroffen wurden und die bislang diskutierten Zusammenhänge für *beliebiges Materialverhalten* gültig sind.

Gehorcht der betrachtete Werkstoff dem *Hookeschen Gesetz*, dann ergibt sich mit den bereits bekannten Zusammenhängen (2.47) und (2.50):

$$\delta W_i = EA \int_0^l \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx + EI \int_0^l \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx. \quad (3.12)$$

Der Ausdruck (3.6) für die virtuelle äußere Arbeit δW_a bleibt hiervon unberührt und ist von der Form des Materialgesetzes unabhängig.

Verallgemeinerung für das Kontinuum

Gegeben sei nun ein beliebiger Festkörper mit dem Volumen V . Der Rand S des Kontinuums sei aufgeteilt in die beiden Randbereiche S_u und S_t , wobei auf dem Randbereich S_u Verschiebungen vorgegeben seien (d.h. der Verschiebungsvektor \underline{u} ist auf S_u mit dem Vektor \underline{u}_0 festgelegt), während auf dem Randbereich S_t der Spannungsvektor \underline{t} mit \underline{t}_0 vorgegeben sei. Die Menge aus S_u und S_t ergibt dann den gesamten Randbereich S , die Schnittmenge aus S_u und S_t ist null. Es folgt aus den obigen Festlegungen, dass auf dem Randbereich S_u die virtuellen Verrückungen $\delta\underline{u}$ zu null werden müssen, da ja die virtuellen Verrückungen im Einklang mit den gegebenen Randbedingungen sein müssen und folglich auf S_u keinerlei Variationen $\delta\underline{u}$ zulässig sind. Nehmen wir dazu noch an, dass der betrachtete Festkörper furch die Volumenkräfte \underline{f} sowie durch m Einzelkräfte \underline{F}_i beansprucht werde, dann kann die *virtuelle äußere Arbeit* δW_a angeschrieben werden als:

$$\delta W_a = \int_V \underline{f} \delta \underline{u} dV + \int_{S_t} \underline{t}_0 \delta \underline{u} dS + \sum_{i=1}^m \underline{F}_i \delta \underline{u}_i. \quad (3.13)$$

Die *virtuelle Verzerrungsenergiedichte* δU_0 lässt sich ermitteln als

$$\delta U_0 = \int_0^{\delta \varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d(\delta \varepsilon_{ij}). \quad (3.14)$$

Man beachte, dass die obige Integration über die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ zu erfolgen hat. Da sämtliche Spannungskomponenten während der virtuellen Verrückungen unverändert bleiben und damit auch keine Funktionen von $\delta \varepsilon_{ij}$ sind ergibt sich sofort:

$$\delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (3.15)$$

Dieser Ausdruck ist dabei vollkommen *unabhängig* von der Art des zugrundeliegenden Materialgesetzes. Die *virtuelle Verzerrungsenergie* bzw. die *virtuelle innere Arbeit* δW_i ergibt sich dann durch Integration von δU_0 über das Volumen des Festkörpers:

$$\delta W_i = \int_V \delta U_0 dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.16)$$

3.3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* lässt sich verbal wie folgt formulieren:

Ein Körper ist genau dann im Gleichgewicht, wenn bei einer beliebigen zulässigen virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage heraus die virtuelle innere Arbeit gleich der virtuellen äußeren Arbeit ist.

Als formelmäßiger Zusammenhang lässt sich dies wie folgt ausdrücken:

$$\delta W_i = \delta W_a. \quad (3.17)$$

Wir wollen zur Illustration noch einmal das Beispiel der starren Wippe der Abb. 3.3 betrachten. Die virtuelle Arbeit δW , die hier ja nur aus der virtuellen äußeren Arbeit δW_a besteht, muss demnach zu null werden. Man erhält also:

$$\delta W = \delta W_a = (F_V a_V - F_S a_S - F_T a_T) \delta \varphi = 0. \quad (3.18)$$

Diese Gleichung hat zwei mögliche Lösungen. Zum einen wäre $\delta\varphi = 0$ eine korrekte und zulässige Lösung. Es ist jedoch ohne Weiteres einsichtig, dass dies eine triviale Lösung darstellt, da $\delta\varphi = 0$ bedeuten würde, dass die Wippe nicht ausgelenkt wird und die virtuellen Verrückungen verschwinden. Eine zielführende Lösung findet man daher, indem man den Klammerausdruck in (3.18) zu null setzt, also:

$$F_V a_V - F_S a_S - F_T a_T = 0. \quad (3.19)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieser Ausdruck genau dem Momentengleichgewicht um den Lagerpunkt der Wippe darstellt. Dies bedeutet, dass das Prinzip der virtuellen Verrückungen stets auf eine *Gleichgewichtsaussage* führt.

3.4 Anwendungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen hat eine ganze Reihe wichtiger Anwendungen, auf die wir im weiteren Verlauf dieses Buches noch eingehen werden. Zwei ganz grundlegende Anwendungen wollen wir nachfolgend ansprechen, nämlich die Ermittlung von Auflagerreaktionen und Schnittgrößen einerseits, und die Ermittlung von Einflusslinien andererseits, beides an statisch bestimmten Systemen.

3.4.1 Bestimmung von Auflagerreaktionen und Schnittgrößen

Eine erste nützliche Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen betrifft die *Ermittlung von Auflagerreaktionen und Schnittgrößen* an Stab- und Balkensystemen. Zur Erläuterung betrachten wir den in Abb. 3.4, links oben, gezeigten Balken auf zwei Stützen, der unter der Gleichstreckenlast q_0 , der Einzellast P_0 und dem Einzelmoment M_0 stehe. Der Balken habe die Länge l , und die Einzelkraft P_0 greife genau in Balkenmitte an. Es sollen die Auflagerreaktion im Auflager B sowie das Biegemoment an der Stelle $x = l/2$ ermittelt werden.

Um also die Auflagerkraft im Auflage B mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen zu ermitteln, wird das Auflager freigeschnitten und die Auflagerkraft B damit freigesetzt (Abb. 3.4, rechts oben). Dadurch wird der vorher statisch bestimmt gelagerte Balken kinematisch verschieblich, und wir legen fest, dass sich der Balken um das Auflager A um den Winkel $\delta\varphi$ verdreht. Da es sich hierbei um eine reine Starrkörperrotation handelt (d.h. der Balken selbst wird nicht verformt, sondern durchläuft eine reine virtuelle Rotation $\delta\varphi$), ergibt sich daraus das in Abb. 3.4, rechts oben, gezeigte Verschiebungsbild. Damit treten in diesem Falle auch keinerlei inneren virtuellen Arbeiten δW_i auf, sondern es sind nur die virtuellen Arbeiten δW_a der äußeren Kräfte und des Momentes zu berücksichtigen, die entlang der jeweiligen virtuellen Verschiebungen bzw. Rotationen geleistet werden. Sowohl die Kraft P_0 als auch die Resultierende der Streckenlast q_0 , die sich auf $q_0 l$ beläuft, werden um das Maß $\delta w_p = \delta\varphi \frac{l}{2}$ verschoben. Die Auflagerkraft B hingegen wird um das Maß $\delta w_B = \delta\varphi l$ ausgelenkt. Das Moment M_0 leistet eine virtuelle Arbeit entlang der Verdrehung $\delta\varphi$, wobei hier die geleistete virtuelle Arbeit mit einem negativen Vorzeichen in die Arbeitsbilanz einzugehen hat, da das Moment entgegen seines Drehsinns verdreht wird. Es ergibt sich also:

$$\delta W = \delta W_a = -M_0 \delta\varphi + (P_0 + q_0 l) \delta\varphi \frac{l}{2} - B l \delta\varphi = 0. \quad (3.20)$$

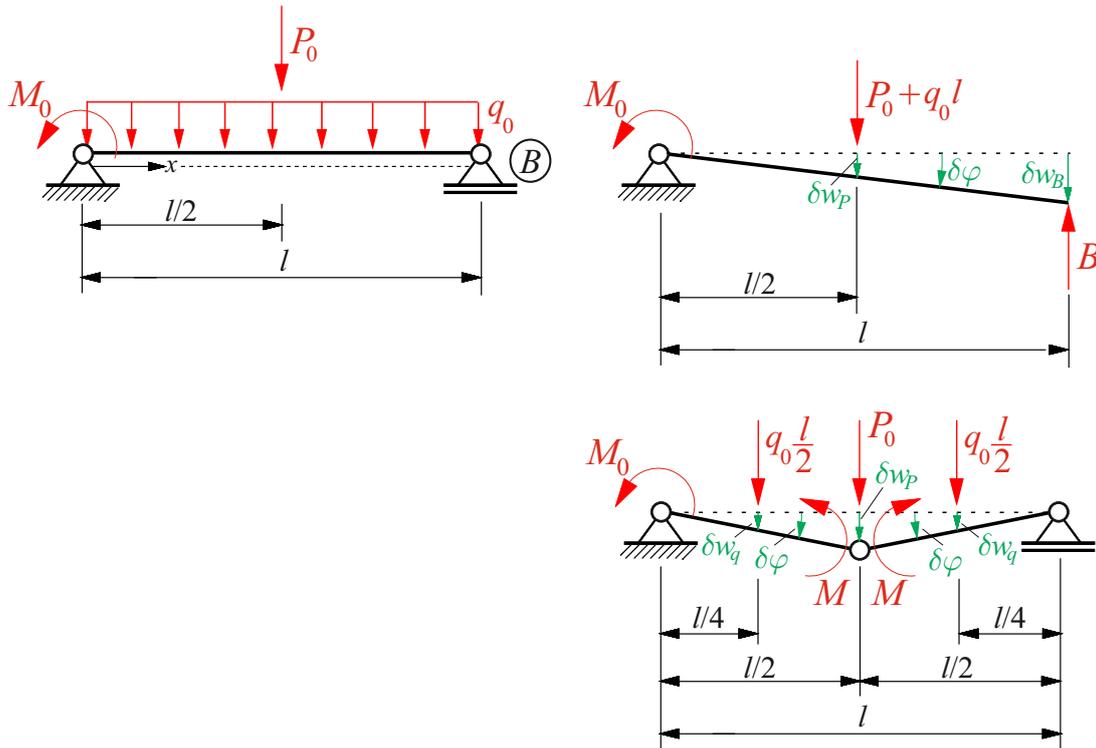


Abb. 3.4: Balken auf zwei Stützen unter Streckenlast q_0 , Einzelkraft P_0 und Einzelmoment M_0 (links), Kinematik zur Ermittlung der Auflagerkraft B (rechts oben), Kinematik zur Ermittlung des Schnittmoments M an der Stelle $x = l/2$ (rechts unten).

Dies kann umgeformt werden wie folgt:

$$\delta W = \delta W_a = \left(-M_0 + (P_0 + q_0 l) \frac{l}{2} - Bl \right) \delta \varphi = 0. \quad (3.21)$$

Um die triviale Lösung $\delta \varphi$ zu vermeiden wird auch hier der Klammerausdruck zu null gesetzt, was man einfach nach der Auflagerkraft B umformen kann:

$$B = -\frac{M_0}{l} + \frac{P_0}{2} + \frac{q_0 l}{2}. \quad (3.22)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies genau der Auflagerkraft entspricht, die man aus einer Gleichgewichtsbetrachtung mittels Momenten- und Kräftegleichgewicht erhalten würde.

Ganz ähnlich wird bei der Ermittlung des Schnittmoments M an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ vorgegangen. Zu diesem Zweck setzen wir das Biegemoment M durch Einführen eines Gelenks an dieser Stelle frei und betrachten die sich damit einstellende virtuelle Verschiebungsfür. Die beiden so entstandenen Balkensegmente der Länge $\frac{l}{2}$ verdrehen sich beide um den identischen virtuellen Winkel $\delta \varphi$, so dass sowohl das äußere Moment M_0 als auch die beiden freigesetzten Biegemomente M virtuelle Arbeiten entlang dieser Verdrehungen leisten. Die Einzelkraft P_0 hingegen wird um das Maß $\delta P = \frac{l}{2} \delta \varphi$ verschoben, während die beiden Resultierenden der Streckenlast mit dem Betrag $q_0 \frac{l}{2}$ auf dem linken und dem rechten Balkensegment entlang der virtuellen Verschiebung $\delta w_q = \frac{l}{4} \delta \varphi$ virtuelle Arbeiten leisten. Es folgt:

$$\delta W = \delta W_a = -2M \delta \varphi - M_0 \delta \varphi + 2q_0 \frac{l}{2} \frac{l}{4} \delta \varphi + P_0 \frac{l}{2} \delta \varphi = 0. \quad (3.23)$$

Man erhält hieraus dann das gesuchte Biegemoment M an der Stelle $x = \frac{l}{2}$:

$$M = -\frac{M_0}{2} + \frac{q_0 l^2}{8} + \frac{P_0 l}{4}. \quad (3.24)$$

Auch hier möge sich die Leserschaft davon überzeugen, dass man dieses Ergebnis auch mittels elementarer Gleichgewichtsbetrachtungen erhalten würde.

Durch das Freisetzen der gesuchten Auflager- oder Schnittreaktion eines statisch bestimmten Systems bei Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen wird das System verschieblich, und die Form der Verschiebungsfigur ist eindeutig festgelegt. Diese eindeutige Verschiebungsfigur, die sich zwangsläufig einstellt, nennen wir *zwangsläufige kinematische Kette*.

Als ein weiteres einfaches Beispiel werde der in Abb. 3.5 gezeigte Flaschenzug betrachtet, an dem ein Gewicht mit der Gewichtskraft G befestigt ist. Gesucht wird die notwendige Kraft F am linken Seilende, um das System im Gleichgewicht zu halten. Um diese Aufgabe

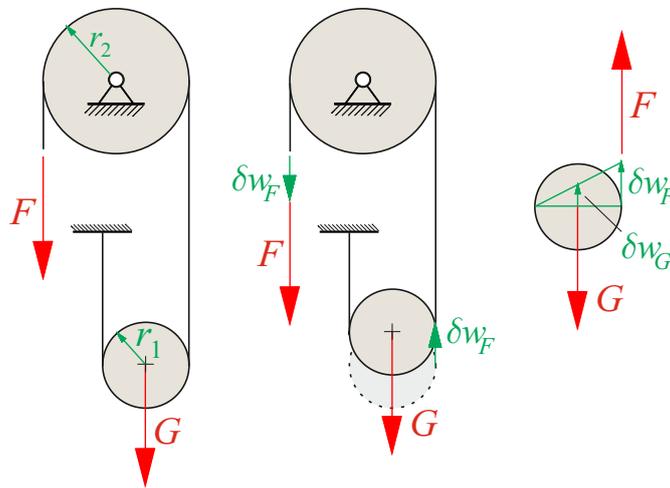


Abb. 3.5: Flaschenzug (links), virtuelle Verschiebungen (mitte), Kinematik (rechts).

mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen zu lösen, wird das System um die virtuelle Verrückung δw_F ausgelenkt (Abb. 3.5, Mitte). Anhand der Kinematik, wie in Abb. 3.5, rechts, gezeigt, erkennt man, dass die Gewichtskraft G die virtuelle Verrückung δw_G erleidet, die halb so groß wie δw_F ist. Die Bilanz der virtuellen Arbeiten lautet dann an diesem Beispiel:

$$\delta W = \delta W_a = F \delta w_F - G \frac{\delta w_F}{2} = 0. \quad (3.25)$$

Hieraus erhält man umgehend:

$$F = \frac{G}{2}. \quad (3.26)$$

3.4.2 Einflusslinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Systeme

Unter einer *Einflusslinie für eine Kraftgröße* versteht man die graphische Darstellung der betrachteten Kraftgröße (beispielsweise einer Auflagerreaktion oder einer Schnittgröße) unter einer sich bewegenden Last (einer sog. *rollenden Last*). Zur Einführung betrachten

wir den in Abb. 3.6, oben, gegebenen Balken auf zwei Stützen, der unter einer rollenden Einheitslast $F = 1$ steht. Gesucht werde hier die Einflusslinie für die Auflagerkraft im Lager B (abgekürzt als EL B bezeichnet). Sie ist in Abb. 3.6 unten dargestellt. Diese

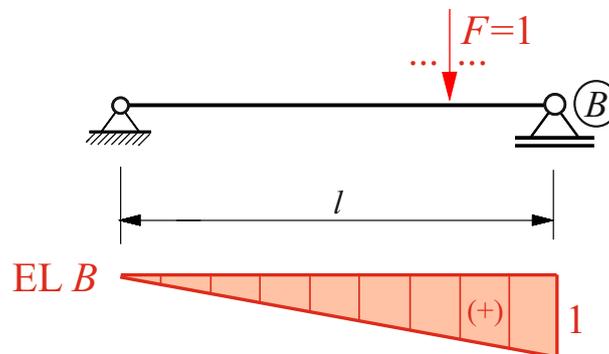


Abb. 3.6: Balken auf zwei Stützen unter rollender Last sowie die Einflusslinie für die Auflagerkraft B.

Einflusslinie kann elementar durch bloße Betrachtung des gegebenen Systems aufgestellt werden. Es ist anschaulich klar, dass die Auflagerkraft B zu null wird, wenn die rollende Last genau über Auflager A steht, was den Nulldurchgang an dieser Stelle erklärt. Steht die rollende Last hingegen genau über Auflager B, so wird die Einheitslast $F = 1$ vollständig vom Auflager B aufgenommen, so dass die Einflusslinie am Auflager B den Wert 1 annimmt. Zwischen den beiden Auflagern verläuft die Einflusslinie linear, wie man sich z.B. auch durch das Berechnen verschiedener weiterer Werte der Einflusslinie für verschiedene Laststellungen klarmachen kann. Es ist eine allgemein gültige Regel, dass die Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen stets aus linearen Linienzügen bestehen.

Die allgemeine Vorgehensweise bei der Ermittlung von Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen wird nachfolgend kurz dargestellt. Durch das Lösen der entsprechenden Bindung, um die gesuchte Kraftgröße freizusetzen, wird das betrachtete System einfach verschieblich. Die sich einstellende kinematische Kette ist zwangsläufig und eindeutig bestimmt. Es gilt dann, dass die Einflusslinie genau der sich einstellenden zwangsläufigen kinematischen Kette entspricht. Den Nachweis hierfür erbringen wir noch an späterer Stelle. Zu beachten ist hierbei noch, dass das vormalig statisch bestimmte System durch das Lösen der zur gesuchten Kraftgröße gehörigen Bindung verschieblich wird. Somit entstehen durch die Auslenkungen keinerlei inneren Schnittgrößen und damit auch keine Deformationen der Systembestandteile selbst. Vielmehr sind sämtliche Verschiebungen Starrkörperverschiebungen und -rotationen, so dass sich Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen immer aus gradlinigen Stabzügen zusammensetzen.

Um nun die gesuchte Einflusslinie zu ermitteln lösen wir diejenige Bindung, die energetisch mit der gesuchten Kraftgröße im Zusammenhang steht und tragen die damit freigesetzte Kraftgröße an das System an. Hiernach ermitteln wir die zwangsläufige kinematische Kette des Systems, und zwar derart, dass die zu der gesuchten Kraftgröße gehörige Weggröße genau den Wert -1 annimmt bzw. die gesuchte Kraftgröße eine negative Arbeit entlang der Einheitsweggröße leistet. Die gesuchte Einflusslinie für die betrachtete Kraftgröße entspricht dann der so ermittelten zwangsläufigen kinematischen Kette. Dies ist der sog. *Satz*

von Land¹. Dieser soll anhand der Abb. 3.7 motiviert werden. Gegeben sei ein Balken auf

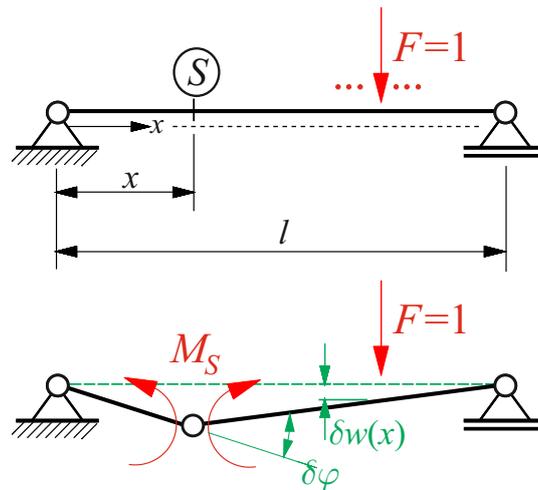


Abb. 3.7: Zum Satz von Land.

zwei Stützen unter einer rollenden Einheitslast $F = 1$, und gesucht werde das Schnittmoment M_S an der Stelle x . Hierzu wird an dieser Stelle ein Gelenk eingeführt, und das gesuchte Schnittmoment wird dadurch beidseits freigesetzt. An der Stelle des Gelenks wird nun der Winkel $\delta\varphi$ angetragen, so dass sich unter der rollenden Last die Verschiebung δw einstellt. Die geleisteten virtuellen Arbeiten δW_a lauten dann:

$$\delta W_a = M_S \delta\varphi + F \delta w = 0. \quad (3.27)$$

Da es sich bei der Kraft F um eine Einheitslast handelt, erhält man:

$$M_S \delta\varphi + \delta w = 0. \quad (3.28)$$

Setzt man nun die Winkelverdrehung mit dem Wert $\delta\varphi = -1$ fest, dann ergibt sich:

$$-M_S + \delta w = 0, \quad (3.29)$$

bzw.

$$M_S = \delta w. \quad (3.30)$$

Somit zeigt sich, dass die Einflusslinie für eine Kraftgröße an einem statisch bestimmten System gerade gleich der Biegelinie / zwangsläufigen kinematischen Kette infolge der energetisch zugeordneten Einheitsverformung ist.

3.5 Rechenregeln zum Umgang mit dem Variationsoperator δ

In den bisherigen Ausführungen wurde der *Variations-Operator* δ , der oft auch einfach als δ -Operator bezeichnet wird, recht häufig verwendet. Dieser drückt, wie bereits erwähnt, eine sehr kleine Änderung bzw. die sog. Variation einer bestimmten Größe, z.B. einer Verschiebung u , aus, wobei die variierte Größe durchaus von einer oder mehreren Variablen

¹nach Robert Land, 1857-1899, deutscher Bauingenieur

abhängen kann. Dies bezeichnet man als die sog. *erste Variation* δu , wenn man z.B. bei einem statischen System eine virtuelle Verschiebung δu aufbringt. Dies ist vergleichbar mit der Differentialrechnung, wenn man im Falle der Größe dx von einer Änderung bezüglich x spricht und damit einen infinitesimal kleinen Zuwachs von x ausdrücken will. Für den Variationsoperator / Differentialoperator δ , der ja die Änderung einer abhängigen Größe (z.B. u) beschreibt, lassen sich daher Rechenregeln aufstellen, die denen der Differentialrechnung sehr ähnlich sind, die im weiteren Verlauf dieses Buches noch häufig zum Einsatz kommen werden und die wir bereits an dieser Stelle im Vorgriff auf Kapitel 5 kurz ansprechen wollen. Tiefergehende Details können aus der reichhaltig verfügbaren Literatur, insbesondere zur Variationsrechnung, entnommen werden, auf eine detaillierte Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet. Es seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ abhängige Größen, z.B. von der Verschiebung u .

1.) Die Reihenfolge von Variation und Differentiation ist vertauschbar:

$$\delta(\nabla u) = \nabla(\delta u). \quad (3.31)$$

Hier ist ∇ der sog. Nabla-Operator bzw. der Gradient: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$.

2.) Die Reihenfolge von Integration und Variation ist vertauschbar:

$$\delta \left[\int_V u dV \right] = \int_V \delta u dV. \quad (3.32)$$

3.) Die erste Variation der Summe mehrerer Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ kann analog zur Summenregel der Differentialrechnung gebildet werden:

$$\delta[f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \dots \pm f_n] = \delta f_1 \pm \delta f_2 \pm \delta f_3 \pm \dots \pm \delta f_n. \quad (3.33)$$

4.) Die erste Variation eines Produkts zweier Funktionen f_1, f_2 lässt sich ähnlich der Produktregel der Differentialrechnung bilden:

$$\delta[f_1 f_2] = f_2 \delta f_1 + f_1 \delta f_2. \quad (3.34)$$

5.) Die erste Variation eines Quotienten zweier Funktionen f_1, f_2 kann man ähnlich der Quotientenregel der Differentialrechnung bilden:

$$\delta \left[\frac{f_1}{f_2} \right] = \frac{\delta f_1}{f_2} - \frac{f_1 \delta f_2}{f_2^2}. \quad (3.35)$$

6.) Die erste Variation einer mit einer Potenz behafteten Funktion f_1 kann ähnlich der Kettenregel der Differentialrechnung ausgeführt werden:

$$\delta[f_1^n] = n f_1^{n-1} \delta f_1. \quad (3.36)$$

7.) Ist die Funktion f eine Funktion mehrerer abhängiger Variablen (beispielsweise der Verschiebungen u, v, w), dann kann die totale Variation δf aus der Summe der partiellen Variationen zusammengesetzt werden:

$$\delta f(u, v, w) = \delta_u f + \delta_v f + \delta_w f. \quad (3.37)$$

Dabei sind die Operatoren $\delta_u, \delta_v, \delta_w$ die partiellen Variationen nach u, v, w .

3.6 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen: Formulierung für das Kontinuum

3.6.1 Formulierung des Prinzips

Es soll nun ein *Randwertproblem der dreidimensionalen Elastostatik* betrachtet werden. Wir verwenden in diesem Abschnitt die Indexschreibweise sowie die Einsteinsche Summenkonvention. Das betrachtete Kontinuum befinde sich im Gleichgewichtszustand und wird durch die Oberflächenbelastung t_i und die Volumenlasten f_i beaufschlagt, welche wiederum für das Spannungsfeld σ_{ij} im Inneren der Körpers verantwortlich sind. Wir lenken den Körper nun infinitesimal aus seiner Gleichgewichtslage aus und bringen damit die virtuellen Verrückungen δu_i auf, die wiederum die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ hervorrufen. Die virtuellen Verschiebungen und Verzerrungen haben den folgenden Anforderungen zu genügen:

- Die virtuellen Verschiebungen δu_i und die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ sind *gedacht* und demnach nicht wirklich vorhanden, sie sind *virtuell*. Dies wird durch das δ -Symbol zum Ausdruck gebracht.
- Die virtuellen Verschiebungen δu_i und die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ seien *infinitesimal klein*.
- Die virtuellen Verschiebungen δu_i und die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ müssen *möglich* sein und können daher nicht beliebig gewählt werden. Sie müssen die geometrischen Randbedingungen des betrachteten Systems erfüllen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen kann nun so hergeleitet werden, indem im allgemeinen Arbeitssatz (2.103) bzw. (2.105) die Kraftgrößen $\sigma_{ij}^{(1)}$, $f_i^{(1)}$, $t_i^{(1)}$ durch die wirklichen Kraftgrößen σ_{ij} , f_i , t_i ersetzt und die kinematischen Größen $u_i^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ durch die virtuellen kinematischen Größen δu_i , $\delta \varepsilon_{ij}$ substituiert werden. Dabei ist zu beachten, dass auf denjenigen Randbereichen S_u , auf denen Verschiebungen vorgeschrieben sind, keine virtuellen Verschiebungen δu_i angesetzt werden dürfen. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen lautet dann also:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_t} t_{i0} \delta u_i dS, \quad (3.38)$$

bzw. bei Verwendung des Bezugssystems x, y, z :

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \\ &= \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV + \int_{S_t} (t_{x0} \delta u + t_{y0} \delta v + t_{z0} \delta w) dS. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Hierin kann wieder nach den inneren virtuellen Arbeiten δW_i und den äußeren virtuellen Arbeiten δW_a unterschieden werden:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \\ \delta W_a &= \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_t} t_{i0} \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen lautet dann, wie zuvor schon gezeigt:

$$\delta W_i = \delta W_a. \quad (3.41)$$

Anhand der Herleitung sowohl des allgemeinen Arbeitssatzes der Elastostatik als auch des Prinzips der virtuellen Verrückungen zeigt sich, dass das Prinzip der virtuellen Verrückungen nicht nur eine Folge der Gleichgewichtsbedingungen ist, sondern hierzu sogar vollkommen *äquivalent* ist. Verbalisiert kann das Prinzip der virtuellen Verrückungen folgendermaßen beschrieben werden:

Ein deformierbarer Körper ist genau dann im Gleichgewicht, wenn bei einer beliebigen zulässigen virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage heraus die virtuelle innere Arbeit gleich der virtuellen äußeren Arbeit ist.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist somit eine über entsprechende virtuelle Arbeiten formulierte Gleichgewichtsaussage und gilt für ein *beliebiges Stoffgesetz*. Es hat, neben den bereits gezeigten einfachen Anwendungen, eine fundamentale Bedeutung für eine Vielzahl von Anwendungen der allgemeinen Strukturmechanik. Wir werden uns auf dieses Prinzip noch häufig beziehen.

3.6.2 Anwendung auf den Zugstab

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist eine über virtuelle Arbeiten formulierte Gleichgewichtsaussage. Wir wollen es nutzen, um für einen Zugstab die Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen herzuleiten. Gegeben sei ein Stab mit der Länge l und der konstanten Dehnsteifigkeit EA (s. Abb. 3.8). Der Stab stehe unter einer konstanten Linielast $n(x)$ in Achsrichtung sowie einer Einzelkraft F am freien Stabende. Wir betrachten

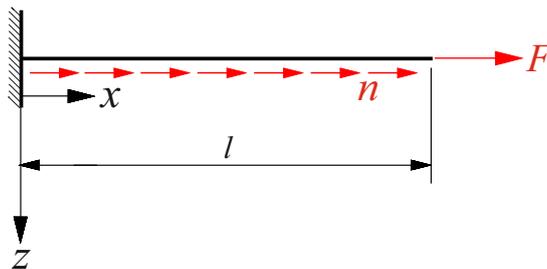


Abb. 3.8: Stab unter Linielast $n(x)$ und Einzelkraft F .

zunächst ein aus dem Stab herausgeschnittenes infinitesimales Schnittelement der Länge dx und bilden hieran das statische Gleichgewicht (Abb. 3.9). Wir erhalten:

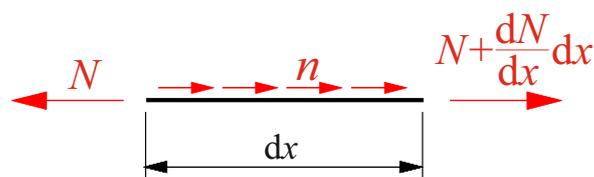


Abb. 3.9: Infinitesimales Schnittelement des betrachteten Stabes.

$$N + \frac{dN}{dx}dx - N + ndx = 0, \quad (3.42)$$

bzw.

$$\frac{dN}{dx} = N' = -n. \quad (3.43)$$

Somit entspricht die erste Ableitung der im Stab wirkenden Normalkraft N der negativen äußeren Streckenlast n . Die Randbedingungen können aus der gegebenen Situation sofort gefolgert werden. Einerseits verschwindet die Stabverschiebung u an der Einspannstelle, andererseits ist die Normalkraft N am freien Stabende gleich der angreifenden Zugkraft F , also:

$$u(x = 0) = 0, \quad N(x = l) = F. \quad (3.44)$$

Dieser einfache Satz an Gleichungen soll nun mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen hergeleitet werden. Die virtuelle innere Arbeit δW_i lautet für den vorliegenden Fall:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV, \quad (3.45)$$

bzw. vereinfacht bei Weglassen der Indizes:

$$\delta W_i = \int_V \sigma \delta \varepsilon dV. \quad (3.46)$$

Das Volumenintegral kann aufgespalten werden in ein Flächenintegral und ein Integral bezüglich der Stablängsachse x :

$$\delta W_i = \int_0^l \sigma A \delta u' dx = \int_0^l N \delta u' dx. \quad (3.47)$$

Anwendung der partiellen Integration, um den Grad der Ableitung hinsichtlich der virtuellen Verschiebung δu um eins zu vermindern, ergibt:

$$\delta W_i = N \delta u|_0^l - \int_0^l N' \delta u dx. \quad (3.48)$$

Die virtuelle äußere Arbeit ergibt sich im vorliegenden Falle als:

$$\delta W_a = \int_0^l n \delta u dx + F \delta u(x = l). \quad (3.49)$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta W_i = \delta W_a$ ergibt dann den folgenden Ausdruck:

$$N \delta u|_0^l - \int_0^l N' \delta u dx - \int_0^l n \delta u dx - F \delta u(x = l) = 0. \quad (3.50)$$

Umformen liefert:

$$- \int_0^l (N' + n) \delta u dx - N \delta u(x = 0) + (N - F) \delta u(x = l) = 0. \quad (3.51)$$

Dieses Ergebnis erfordert eine eingehende Interpretation. Die Summe der in (3.51) auftauchenden einzelnen Terme muss den Wert null annehmen. Da jedoch in jedem dieser Terme Variationen der Verschiebung u auftauchen, die beliebig sein können und zudem

vollkommen unabhängig voneinander sind, kann (3.51) im Allgemeinen nur dann erfüllt werden, wenn jeder der dort auftretenden Terme zu null wird.

Als erstes wollen wir den Integralterm in (3.51) näher betrachten:

$$\int_0^l (N' + n) \delta u dx = 0. \quad (3.52)$$

Die triviale Lösung $\delta u = 0$ ist hier nicht weiter von Belang, so dass als einzige Möglichkeit, diese Gleichung zu erfüllen, das Nullsetzen des Klammerterms im Integral in (3.52) verbleibt:

$$N' + n = 0. \quad (3.53)$$

Offenbar ist dies der bereits aus einer einfachen Gleichgewichtsforderung abgeleitete Zusammenhang (3.43) zwischen der Normalkraft N und der Streckenlast n des Stabes.

Der zweite Term in (3.51) beinhaltet die Aussage, dass an der Stelle $x = 0$ entweder die Normalkraft N verschwindet (was einem freien Stabende entspräche), oder dass die Variation δu verschwinden muss:

$$\text{entweder } \delta u(x = 0) = 0 \quad \text{oder} \quad N(x = 0) = 0. \quad (3.54)$$

Verschwindet die Variation δu der Verschiebung u , dann ist das gleichbedeutend damit, dass die Verschiebung u selber an dieser Stelle einen festen vorgegebenen Wert $u(x = 0) = u_0$ (z.B. den Wert $u_0 = 0$) annehmen muss. Am gegebenen Beispiel mit einer festen Einspannung bei $x = 0$ liegt natürlich dieser Fall vor, so dass man als erste Randbedingung erhält:

$$u(x = 0) = u_0 = 0. \quad (3.55)$$

Dies entspricht der bereits elementar aus der Anschauung hergeleiteten ersten Randbedingung in (3.44). Bei einer vorgegebenen Verschiebung u und einer damit verschwindenden ersten Variation $\delta u = 0$ wird die Normalkraft N an dieser Stelle im Allgemeinen nicht zu null werden. Vielmehr wird die Normalkraft an der Stelle $x = 0$ in diesem konkreten Falle die aus der gegebenen äußeren Belastung resultierende Auflagerkraft sein.

Der dritte Ausdruck in (3.51) liefert analog zu den vorherigen Betrachtungen die folgende Aussage:

$$\text{entweder } \delta u(x = l) = 0 \quad \text{oder} \quad N(x = l) - F = 0. \quad (3.56)$$

Für das hier betrachtete Beispiel kommt nur die zweite Alternative in Frage:

$$N(x = l) = F. \quad (3.57)$$

Das ist identisch mit der bereits elementar aus der Anschauung hergeleiteten zweiten Randbedingung in (3.44).

Insgesamt zeigt sich, dass das Prinzip der virtuellen Verrückungen nicht nur die *Gleichgewichtsbedingungen* eines betrachteten Systems liefert, sondern auch auf eindeutige Art und Weise auf alle potentiell möglichen zugehörigen *Randbedingungen* führt. Diese sind für das hier betrachtete sehr einfache Beispiel auch eindeutig aus der Anschauung bzw. aus elementaren Gleichgewichtsbedingungen herleitbar, allerdings ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen bei einer Vielzahl von komplexeren Aufgabenstellungen von unschätzbarem Wert. Es führt stets auf Aussagen, die in den zugrundeliegenden *Kraftgrößen* formuliert sind.

3.7 Das Einheits-Verschiebungs-Theorem

Ein Theorem, das sich direkt aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen herleiten lässt, ist das sog. *Einheits-Verschiebungs-Theorem*, das nachfolgend kurz vorgestellt wird. Betrachtet werde ein Festkörper, der ausschließlich durch die Einzelkraft \underline{F} beaufschlagt wird, die am Punkt P angreift. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta W_i = \delta W_a$ lautet dann:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \underline{F} \delta \underline{w}_P. \quad (3.58)$$

Hier kann man von der Tatsache Gebrauch machen, dass die virtuelle Verrückung und damit auch die virtuelle Verschiebung $\delta \underline{w}_P$ des Punktes P beliebig ist und man daher auch einfach einen Einheitsvektor \underline{e} ansetzen kann. Man erhält:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \underline{F}. \quad (3.59)$$

Das Einheits-Verschiebungs-Theorem kann damit also eingesetzt werden, um an diskreten Punkten eines gegebenen Systems Einzelkräfte und Einzelmomente oder diskrete Verschiebungen und Verdrehungen an Last- und Momentenangriffspunkten zu bestimmen. Hierzu muss jedoch das Verschiebungsfeld in Form diskreter Verschiebungen oder Verdrehungen an denjenigen Punkten vorliegen, an denen die Formänderungen bzw. Kraftgrößen bestimmt werden sollen. Wir wollen diese diskreten Verschiebungen und Verdrehungen allgemein als die sog. generalisierten Freiheitsgrade q_j bezeichnen, wobei j den Ort bezeichnet.

Seien also die virtuellen Arbeiten δW_i und δW_a als Funktionen solch generalisierter Freiheitsgrade q_j gegeben. Dann gilt für die virtuelle innere Arbeit δW_i :

$$\delta W_i = \delta W_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{\partial W_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.60)$$

Analog gilt dies für die virtuelle äußere Arbeit:

$$\delta W_a = \delta W_a(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{\partial W_a}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.61)$$

Da

$$\frac{\partial W_a}{\partial q_j} = F_j \quad (3.62)$$

gilt (wobei F_j diejenige Kraftgröße ist, die mit dem generalisierten Freiheitsgrad q_j zusammenhängt), ergibt sich aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta W_i = \delta W_a$:

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_j} \delta q_j = \frac{\partial W_a}{\partial q_j} \delta q_j = F_j \delta q_j, \quad (3.63)$$

bzw.

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_j} = F_j. \quad (3.64)$$

Leitet man also die Verzerrungsenergie / innere Arbeit W_i partiell nach dem generalisierten Freiheitsgrad q_j ab, so erhält man die mit diesem Freiheitsgrad assoziierte Kraftgröße. Hierin können die q_j sowohl Verschiebungen als auch Verdrehungen an der Stelle j sein, und demnach kann die Größe F_j sowohl eine Einzelkraft als auch ein Einzelmoment sein.

Um die partielle Ableitung $\frac{\partial W_i}{\partial q_j}$ bestimmen zu können betrachten wir den Zusammenhang mit der zugehörigen Verzerrungsenergiedichte U_0 :

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \int_V U_0 dV = \int_V \frac{\partial U_0}{\partial q_j} dV. \quad (3.65)$$

An einem linear-elastischen Stab ergibt sich mit $U_0 = \frac{1}{2} E u_0'^2$ demnach:

$$\frac{\partial U_0}{\partial q_j} = E u_0' \frac{\partial}{\partial q_j} u_0'. \quad (3.66)$$

Damit folgt aus (3.65):

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_j} = \int_V \frac{\partial U_0}{\partial q_j} dV = \int_V E u_0' \frac{\partial}{\partial q_j} u_0' dV = \int_0^l E A u_0' \frac{\partial}{\partial q_j} u_0' dx = F_j. \quad (3.67)$$

Einen ähnlichen Ausdruck kann man für den Euler-Bernoulli-Balken anschreiben:

$$E I_{yy} \int_0^l w_0'' \frac{\partial}{\partial q_j} w_0'' dx = F_j. \quad (3.68)$$

Wir wollen die Vorgehensweise am in Abb. 3.10 gegebenen Stabzweischlag erläutern, für den die beiden eingezeichneten Verschiebungen u und w des Kraftangriffspunktes gesucht werden. Beide Stäbe 1 und 2 weisen die gleiche Dehnsteifigkeit EA auf. Am Gelenk zwi-

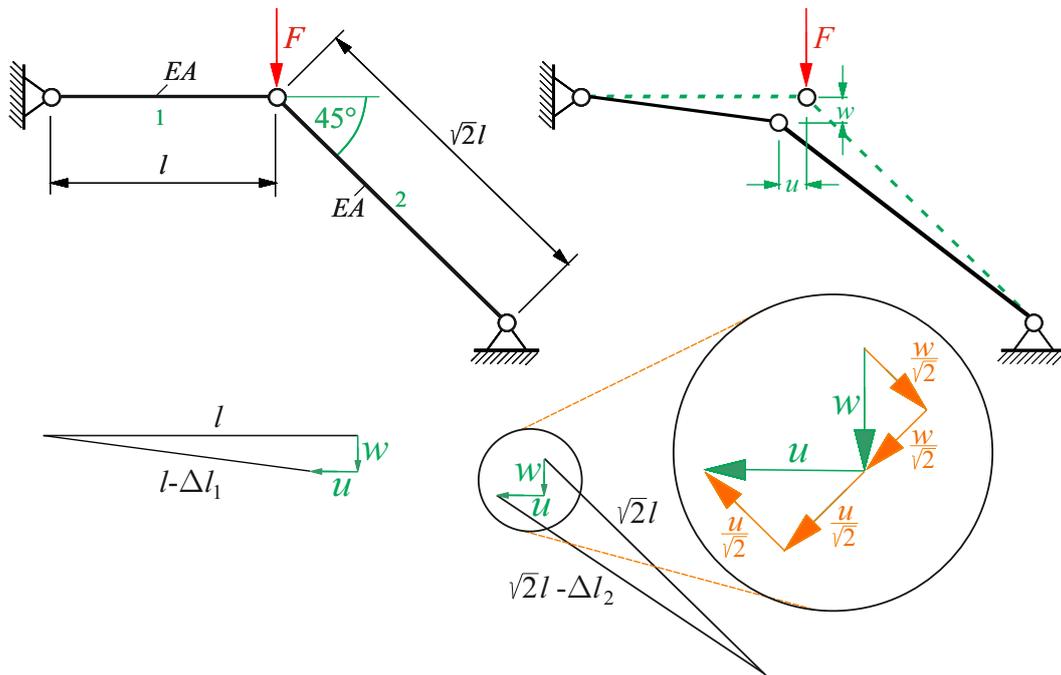


Abb. 3.10: Stabzweischlag unter Einzelkraft F (links oben), verformte Struktur mit Knotenverschiebungen (rechts oben), Details der Verschiebungen (unten).

schen den beiden Stäben greift eine Einzelkraft F an.

Wir bringen am Knoten nun anstatt der realen Verschiebungen u und w die beiden virtuellen Verrückungen δu und δw auf und betrachten die geleisteten virtuellen Arbeiten:

$$F \delta w = \int_0^l N_1 \delta \varepsilon_1 dx + \int_0^{\sqrt{2}l} N_2 \delta \varepsilon_2 dx, \quad (3.69)$$

wobei N_1 und N_2 sowie $\delta\varepsilon_1$ und $\delta\varepsilon_2$ die Normalkräfte bzw. die virtuellen Dehnungen der Stäbe 1 und 2 sind. Man beachte, dass die virtuelle Verrückung δu in dieser Arbeitsbilanz nicht auftaucht.

Aus elementaren geometrischen Betrachtungen kann man für die Stabdehnungen folgendes ermitteln (s. Abb. 3.10, unten):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = 1 - \frac{1}{l} \sqrt{(l-u)^2 + w^2}. \quad (3.70)$$

Da wir von Verschiebungen u und w sowie virtuellen Verschiebungen δu und δw ausgehen, die infinitesimal klein sind, können wir vereinfachend annehmen, dass sich die Dehnung ε_1 im Wesentlichen aus der Verschiebung u ergibt, so dass gilt:

$$\varepsilon_1 \simeq -\frac{u}{l}. \quad (3.71)$$

Analog erhalten wir für die Stabdehnung ε_2 :

$$\varepsilon_2 \simeq \frac{u-w}{2l}. \quad (3.72)$$

Für die virtuellen Dehnungen gilt dann:

$$\delta\varepsilon_1 = -\frac{\delta u}{l}, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{\delta u - \delta w}{2l}. \quad (3.73)$$

Die Arbeitsgleichung (3.69) geht dann über in:

$$F\delta w = -\int_0^l N_1 \frac{\delta u}{l} dx + \int_0^{\sqrt{2}l} N_2 \frac{\delta u - \delta w}{2l} dx. \quad (3.74)$$

An dieser Stelle kann man das Konstitutivgesetz des Stabes ins Spiel bringen wie folgt:

$$N_1 = EA\varepsilon_1 = -EA\frac{u}{l}, \quad N_2 = EA\varepsilon_2 = EA\frac{u-w}{2l}. \quad (3.75)$$

Damit erhält man für (3.74):

$$F\delta w = \int_0^l EA\frac{u}{l} \frac{\delta u}{l} dx + \int_0^{\sqrt{2}l} EA\frac{u-w}{2l} \frac{\delta u - \delta w}{2l} dx, \quad (3.76)$$

bzw. nach Ausführen der Integrationen:

$$F\delta w = \frac{EA}{l} u \delta u + \frac{\sqrt{2}EA}{4} \frac{EA}{l} (u-w) \delta u - \frac{\sqrt{2}EA}{4} \frac{EA}{l} (u-w) \delta w. \quad (3.77)$$

An dieser Stelle wird Gebrauch von der Tatsache gemacht, dass die virtuellen Verrückungen (hier δu und δw) beliebig sein dürfen, solange sie den gegebenen Randbedingungen genügen. Wir setzen also zum Einen in (3.77) $\delta u = 1$ und $\delta w = 0$ und erhalten:

$$\frac{EA}{l} u + \frac{\sqrt{2}EA}{4l} (u-w) = 0. \quad (3.78)$$

Andererseits verwenden wir (3.77) und setzen $\delta u = 0$ und $\delta w = 1$, was auf die folgende Gleichung führt:

$$\frac{\sqrt{2}EA}{4l} (w-u) = F. \quad (3.79)$$

Mit (3.78) und (3.79) stehen somit zwei Gleichungen bereit, um die gesuchten Verschiebungen u und w des Kraftangriffspunktes zu ermitteln. Man erhält:

$$u = \frac{Fl}{EA}, \quad w = \left(1 + 2\sqrt{2}\right) \frac{Fl}{EA}. \quad (3.80)$$

Die Vorgehensweise im Rahmen des Einheits-Verschiebungs-Theorems sei desweiteren am Kragarm der Abb. 3.11 erläutert, der durch eine Einzelkraft an seinem Ende belastet wird. Am Kraftangriffspunkt ergibt sich die Verschiebung $w_0(x = l) = w_e$, und wir wollen die Biegelinie $w(x)$ in Abhängigkeit von w_e beschreiben und abschließend den Betrag von w_e ermitteln. Hierin spielt also die Durchbiegung w_e die Rolle des generalisierten Freiheitsgrades q , wobei hier der Index j entfallen kann. Wir lösen das gegebene Problem,

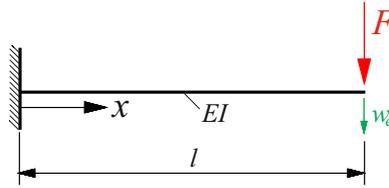


Abb. 3.11: Kragarm unter Einzelkraft F .

indem wir die Biegelinie durch vierfache Integration des Konstitutivgesetzes $EIw'''' = q$ ermitteln:

$$\begin{aligned} EIw_0'''' &= q = 0, \\ EIw_0''' &= -Q = C_1, \\ EIw_0'' &= -M = C_1x + C_2, \\ EIw_0' &= \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3, \\ EIw_0 &= \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Das Auswerten der beiden Randbedingungen $w_0(x = 0) = 0$ und $w_0'(x = 0) = 0$ ergibt sofort $C_3 = C_4$. Auswerten der Randbedingung $Q(x = l) = -C_1 = F$ ergibt $C_1 = -F$. Aus der verbleibenden Bedingung $w_0(x = l) = w_e$ erhalten wir:

$$\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}Fl^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 \right) = w_e, \quad (3.82)$$

was wir nach der verbleibenden Konstanten C_2 auflösen können:

$$C_2 = \frac{2EIw_e}{l^2} + \frac{Fl}{3}. \quad (3.83)$$

Damit können wir die Biegelinie $w(x)$ des Balkens in Abhängigkeit von w_e darstellen als:

$$w_0(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{6}Fx^3 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{2EIw_e}{l^2} + \frac{Fl}{3} \right) \right]. \quad (3.84)$$

Die zweite Ableitung lautet dann:

$$w_0''(x) = \frac{1}{EI} \left(-Fx + \frac{2EIw_e}{l^2} + \frac{Fl}{3} \right). \quad (3.85)$$

Die partielle Ableitung von w_0'' nach $q = w_e$ ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial q} w_0'' = \frac{2}{l^2}. \quad (3.86)$$

Damit können (3.68) auswerten und erhalten nach einigen wenigen Umformungen:

$$w_e = \frac{Fl^3}{3EI}. \quad (3.87)$$

Die Schwierigkeit bei Verwendung des Einheits-Verschiebungs-Theorems für die Analyse von Stabwerken besteht i.a. darin, die auftretenden Verschiebungs- und Verzerrungsfelder durch die generalisierten Freiheitsgrade auszudrücken, was die Anwendung einigermaßen umständlich machen kann. Wir werden daher dieses Theorem im weiteren Verlauf dieses Buches nicht weiter betrachten.