

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	I
Über die Autoren	III
Widmung	V
1 Einführung	2
1.1 Grundbegriffe	2
1.2 Motivation und Aufbau dieses Buches	6
1.3 Weitere Literaturhinweise	9
1.4 Einige Hinweise zur Nomenklatur	10
1.5 Literatur zu Kapitel 1	12
TEIL I - EINIGE GRUNDLAGEN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE	13
2 Einige Grundbegriffe der Elastizitätstheorie	14
2.1 Einführung	14
2.2 Spannungszustand	17
2.2.1 Spannungsvektor und Spannungstensor	17
2.2.2 Transformationsbeziehungen	21
2.2.3 Hauptspannungen, Invarianten, Mohrsche Kreise	22
2.2.4 Hydrostatischer Spannungszustand, Deviator	24
2.2.5 Gleichgewichtsbedingungen	26
2.3 Deformation und Verzerrung	27
2.3.1 Allgemeines	27
2.3.2 Green-Lagrangescher Verzerrungstensor	30
2.3.3 Von-Kármánsche Verzerrungen	31
2.3.4 Infinitesimaler Verzerrungstensor	32
2.3.5 Kompatibilitätsbedingungen	34
2.4 Konstitutive Gleichungen / Materialgesetz	35
2.4.1 Allgemeines	35
2.4.2 Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz	35
2.4.3 Formänderungsenergie	39

2.5	Randwertprobleme	41
2.6	Temperaturdehnungen	43
2.7	Literatur zu Kapitel 2	45
3	Ebene Probleme und Flächentragwerke	46
3.1	Allgemeines	46
3.2	Flächentragwerke	47
3.3	Ebener Verzerrungszustand	49
3.4	Ebener Spannungszustand	51
3.5	Analyse isotroper Scheiben	53
3.5.1	Airy'sche Spannungsfunktion, Bipotentialgleichung	53
3.5.2	Einige Beispiele zur Lösung von Scheibenproblemen	55
3.6	Analyse schubsteifer isotroper Platten	59
3.6.1	Kinematik im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie	59
3.6.2	Schnittgrößen, Gleichgewicht, Plattengleichung	62
3.6.3	Ersatzquerkräfte und Randbedingungen	65
3.6.4	Naviersche Lösung	68
3.6.5	Lévy'sche Lösung	70
3.7	Literatur zu Kapitel 3	73
4	Variationsprinzipien und Näherungsverfahren der Mechanik	74
4.1	Einleitung	74
4.2	Allgemeiner Arbeitssatz	74
4.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	77
4.4	Prinzip der virtuellen Kräfte	78
4.5	Extremalprinzipien	79
4.5.1	Das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials	79
4.5.2	Das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtenergierpotentials	80
4.6	Rechenregeln zum Umgang mit dem δ -Operator	81
4.7	Anwendung auf einfache mechanische Systeme	82
4.7.1	Stab unter Linienlast $n(x)$ und Einzelkraft F	82
4.7.2	Balken unter Streckenlast $q(x)$ und Einzelkraft F	86
4.8	Näherungsverfahren	90
4.8.1	Das Ritz-Verfahren	90
4.8.2	Das Galerkin-Verfahren	98
4.8.3	Die Finite-Elemente-Methode	99
4.9	Literatur zu Kapitel 4	104

5	Festigkeitshypothesen für isotrope Materialien	106
5.1	Einführung	106
5.2	Hauptspannungshypothese	109
5.3	Hauptdehnungshypothese	110
5.4	Formänderungsenergiehypothese	110
5.5	Gestaltänderungsenergiehypothese	112
5.6	Fließbedingung von Tresca	113
5.7	Coulomb-Mohr-Hypothese	113
5.8	Drucker-Prager-Hypothese	116
5.9	Cuntzes Versagensmoduskonzept	117
5.10	Literatur zu Kapitel 5	120
TEIL II - GRUNDLAGEN DER BERECHNUNG EBENER LAMINATE		121
6	Verhalten einer Lamineinzelschicht	122
6.1	Allgemeines	122
6.2	Materialgesetz einer Lamineinzelschicht	122
6.2.1	Vollständige Anisotropie	123
6.2.2	Monoklinie / Monotropie	124
6.2.3	Orthogonale Anisotropie / Orthotropie	125
6.2.4	Transversale Isotropie / Querisotropie	126
6.2.5	Isotropie	127
6.2.6	Darstellung in Ingenieurkonstanten	128
6.2.7	Transformationsregeln	130
6.3	Formulierung für den ebenen Fall	133
6.4	Effektive Steifigkeiten einer unidirektionalen Einzelschicht, Mischungsregeln	136
6.4.1	Vorbemerkungen	136
6.4.2	Elastizitätsmodul in Faserrichtung	137
6.4.3	Elastizitätsmodul rechtwinklig zur Faserrichtung	138
6.4.4	Ebene Querdehnungszahl	140
6.4.5	Ebener Gleitmodul	141
6.4.6	Verbesserte Mischungsregeln, Schrankensätze	141
6.5	Literatur zu Kapitel 6	143
7	Klassische Laminattheorie	144
7.1	Einführung	144
7.2	Voraussetzungen und Kinematik	146
7.3	Verzerrungen und Spannungen	148
7.4	Konstitutives Laminat-Verhalten	150
7.5	Koppeleffekte	153

7.5.1	Schubkopplung	154
7.5.2	Biege-Drill-Kopplung	154
7.5.3	Biege-Dehn-Kopplung	155
7.5.4	Anmerkungen zu Koppeleffekten	156
7.6	Spezielle Laminat	157
7.6.1	Isotrope Einzelschicht	157
7.6.2	Orthotrope Einzelschicht	157
7.6.3	Anisotrope Einzelschicht / Off-axis Einzelschicht	158
7.6.4	Symmetrische Laminat	158
7.6.5	Kreuzverbunde	158
7.6.6	Winkelverbunde	159
7.6.7	Quasi-isotrope Laminat	159
7.7	Wechsel der Bezugsebene	160
7.8	Effektiv-Eigenschaften von Laminaten	161
7.8.1	Ebener Elastizitätsmodul E_{xx}	162
7.8.2	Ebener Elastizitätsmodul E_{yy}	162
7.8.3	Ebener Gleitmodul G_{xy}	163
7.8.4	Ebene Querdehnungszahl ν_{xy}	163
7.8.5	Elastizitätsmodul $E_{xx,B}$ unter Biegung	163
7.8.6	Elastizitätsmodul $E_{yy,B}$ unter Biegung	164
7.8.7	Überschlägige Berechnung von Effektiv-Eigenschaften	165
7.9	Formänderungsenergie eines Laminats	165
7.10	Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung bei unsymmetrischen Laminaten	168
7.11	Literatur zu Kapitel 7	170
8	Randwertaufgaben statischer Laminatprobleme	172
8.1	Statisches Gleichgewicht und Verschiebungsdifferentialgleichungen eines Laminats	172
8.2	Laminat-Randbedingungen	176
8.3	Energetische Herleitung der Grundgleichungen	177
8.4	Dimensionslose Schreibweise	182
8.5	Beispiele für exakte Lösungen von Randwertaufgaben statischer Laminatprobleme	186
8.5.1	Naviersche Lösungen	186
8.5.2	Lévysche Lösungen	195
8.6	Das Ritz-Verfahren	199
8.6.1	Energiebetrachtung und Ritzsche Gleichungen	199
8.6.2	Ansatzfunktionen für symmetrische orthotrope Laminat	203
8.6.3	Einige ausgewählte geschlossen-analytische Näherungslösungen . . .	206
8.7	Literatur zu Kapitel 8	211

9	Festigkeitshypothesen für unidirektional verstärkte Einzelschichten	212
9.1	Kriterium maximaler Spannungen	213
9.2	Kriterium maximaler Verzerrungen	213
9.3	Tsai-Hill-Kriterium	214
9.4	Tsai-Wu-Kriterium	214
9.5	Kriterium von Puck	216
9.6	Kriterium von Hashin	217
9.7	Wirkebenen-Bruchbedingung von Puck	217
9.8	Versagensmodus-Konzept gemäß Cuntze	222
9.9	Literatur zu Kapitel 9	225
10	Hygrothermische Probleme	226
10.1	Einführung	226
10.2	Thermomechanische Probleme	226
10.3	Hygromechanische Probleme	230
10.4	Literatur zu Kapitel 10	235
11	Laminattheorien höherer Ordnung	236
11.1	Einführung	236
11.2	Dreidimensionales lokales Gleichgewicht	238
11.3	Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	239
11.3.1	Kinematik und konstitutive Beziehungen	239
11.3.2	Gleichgewichts- und Randbedingungen	243
11.3.3	Verzerrungsenergie	245
11.3.4	Bestimmung des Schubkorrekturfaktors K	246
11.3.5	Ausgewählte Lösungen für Randwertaufgaben statischer Laminat- probleme	248
11.3.6	Näherungsverfahren	253
11.4	Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy	255
11.4.1	Allgemeines	255
11.4.2	Kinematik	255
11.4.3	Verzerrungen und konstitutive Beziehungen	258
11.4.4	Gleichgewichtsbedingungen	261
11.4.5	Naviersche Lösungen	262
11.5	Lagenweise Ansätze	265
11.5.1	Allgemeines	265
11.5.2	Verschiebungsfeld	267
11.5.3	Kinematik und Spannungsberechnung	269
11.5.4	Anmerkungen zur Anwendung	270
11.5.5	Zylindrische Biegung eines Kreuzverbund-Laminats: Exakte Lösung nach Pagano (1969)	270
11.6	Literatur zu Kapitel 11	274

12 Randeﬀekte in Laminaten	276
12.1 Einföhrung	276
12.2 Das Wesen des Randeﬀektes	277
12.3 Verfahren zur Analyse des Laminat-Randeﬀektes	278
12.3.1 Delaminationskräfte und -momente	279
12.3.2 Finite-Elemente-Analysen	280
12.3.3 Geschlossen-analytische Randeﬀektanalyse nach Kassapoglou und Lagace (1986)	281
12.3.4 Semi-analytische Randeﬀektanalyse nach Mittelstedt und Becker (2006, 2007)	284
12.4 Nutzen der Randeﬀekt-Analysen	287
12.5 Ergebnisse und Diskussion	288
12.6 Empfehlungen für die Praxis	291
12.7 Verwandte Probleme	292
12.8 Ausblick: Bewertung des Laminat-Randeﬀektes mit hybriden Kriterien	293
12.9 Literatur zu Kapitel 12	294
TEIL III - STABILITÄT EBENER LAMINAT-STRUKTUREN	295
13 Einige Grundbegriffe der Stabilitätstheorie	296
13.1 Einföhrung und Grundbegriffe	296
13.2 Ein grundlegendes Beispiel: Der elastisch eingespannte starre Stab	298
13.3 Knicken von Stäben mit Hilfe der Gleichgewichtsmethode	302
13.4 Gleichgewicht und Verzweigungsprobleme aus energetischer Sicht	309
13.5 Das Stabknicken aus energetischer Sicht	312
13.6 Vereinfachtes Verzweigungskriterium	316
13.7 Energetische Herleitung der Knick-Differentialgleichung	317
13.8 Energiebasierte Näherungsverfahren zum Stabknicken	319
13.8.1 Das Ritz-Verfahren bei eingliedrigen Ansätzen: Der Rayleigh-Quotient	319
13.8.2 Das Ritz-Verfahren bei mehrgliedrigen Ansätzen	320
13.8.3 Das Galerkin-Verfahren	323
13.8.4 Die Finite-Elemente-Methode	324
13.9 Literatur zu Kapitel 13	327
14 Naviersche Lösungen für Laminat-Beulprobleme	328
14.1 Grundgleichungen im Rahmen der Klassischen Laminattheorie	328
14.2 Naviersche Lösungen im Rahmen der Klassischen Laminattheorie	332
14.2.1 Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes symmetrisches Kreuzverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung	332
14.2.2 Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes symmetrisches Kreuzverbund-Laminat unter biaxialer Druckbelastung	338

14.2.3	Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes unsymmetrisches Kreuzverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung . . .	340
14.2.4	Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes unsymmetrisches Winkelverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung . . .	344
14.3	Grundgleichungen im Rahmen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung .	347
14.4	Naviersche Lösungen im Rahmen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	349
14.4.1	Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes symmetrisches Kreuzverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung . . .	349
14.4.2	Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes unsymmetrisches Kreuzverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung . . .	353
14.4.3	Naviersche Lösung für ein allseitig gelenkig gelagertes unsymmetrisches Winkelverbund-Laminat unter uniaxialer Druckbelastung . . .	356
14.5	Literatur zu Kapitel 14	359
15	Lévy'sche Lösungen für Laminat-Beulprobleme	360
15.1	Einführung	360
15.2	Fallunterscheidungen und alternative Lösungsdarstellungen	362
15.3	Ausgewählte Lévy'sche Lösungen	364
15.3.1	Dreiseitig gelenkig gelagertes Laminat mit einem freien Rand	364
15.3.2	Laminat mit einem fest eingespannten und einem freien unbelasteten Rand	367
15.3.3	Laminat mit einem elastisch eingespannten und einem freien unbelasteten Rand	369
15.3.4	Laminat mit zwei elastisch eingespannten unbelasteten Rändern . .	371
15.4	Literatur zu Kapitel 15	373
16	Energiemethoden zur Lösung von Laminat-Beulproblemen	374
16.1	Energetische Herleitung der Grundgleichungen	374
16.2	Der Rayleigh-Quotient für Laminat ohne Biege-Drill-Kopplung	379
16.2.1	Methodik	379
16.2.2	Allseitig gelenkig gelagertes Laminat	382
16.2.3	Laminat mit fest eingespannten unbelasteten Rändern	384
16.2.4	Laminat mit drehelastisch eingespannten unbelasteten Rändern . .	386
16.2.5	Dreiseitig gelenkig gelagertes Laminat mit einem freiem unbelasteten Rand	391
16.2.6	Laminat mit einem fest eingespannten und einem freien unbelasteten Rand	393
16.2.7	Laminat mit einem drehelastisch eingespannten und einem freien unbelasteten Rand	394
16.2.8	Laminat mit einem gelenkig gelagerten und einem fest eingespannten unbelasteten Rand	397

16.2.9	Laminat mit einem drehelastisch eingespannten und einem gelenkig gelagerten unbelasteten Rand	398
16.2.10	Laminat mit einem drehelastisch eingespannten und einem fest eingespannten unbelasteten Rand	399
16.3	Lokales Beulen dünnwandiger Trägerstrukturen	400
16.4	Der Rayleigh-Quotient im Rahmen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	405
16.5	Das Ritz-Verfahren für beliebig aufgebaute symmetrische Lamine	407
16.5.1	Methodik	407
16.5.2	Lamine unter ebener Schublast	418
16.5.3	Lamine unter ebener Biegung	420
16.5.4	Näherungsweise Berücksichtigung von Lastfallinteraktionen	421
16.6	Einfluss der Biege-Drill-Kopplung auf die Stabilität von Laminen	423
16.6.1	Einfluss der Biege-Drill-Kopplung bei Laminen unter Druck	424
16.6.2	Vorzeichenabhängigkeit der Verzweigungslast bei Schub	425
16.7	Literatur zu Kapitel 16	426
17	Beulen ausgesteifter Lamine	428
17.1	Allgemeines	428
17.2	Das Ritz-Verfahren für longitudinal und transversal ausgesteifte Lamine .	429
17.3	Lévy'sche Lösung für einachsige gedrückte längsausgesteifte Lamine	436
17.3.1	Grundgleichungen	436
17.3.2	Übergangsbedingungen an der Steife i	437
17.3.3	Randbedingungen	439
17.3.4	Auswerten der Rand- und Übergangsbedingungen	440
17.3.5	Beulbedingungen	441
17.4	Analytische Lösungen für einachsige gedrückte längsausgesteifte Lamine .	445
17.4.1	Ermittlung der Beullast	445
17.4.2	Berechnen der Mindeststeifigkeit	447
17.4.3	Verifikation und Diskussion	448
17.4.4	Dimensionslose Darstellung	453
17.5	Dreiseitig gelenkig gelagertes Laminat mit einem verstärkten freien Rand .	455
17.6	Literatur zu Kapitel 17	465
18	Nachbeulanalyse von Laminen	466
18.1	Einleitung	466
18.2	Geschlossen-analytische Methode	467
18.2.1	Materialgesetz und Randbedingungen	467
18.2.2	Grundgleichungen: Verzerrungen, Gleichgewicht und Kompatibilität	468
18.2.3	Nachbeulverhalten der allseitig gelenkig gelagerten Platte	472
18.2.4	Nachbeulverhalten der Platte mit fest eingespannten unbelasteten Rändern	476

18.2.5 Verifizierung der geschlossen-analytischen Berechnungsmethoden . .	479
18.3 Semi-analytische Methode	483
18.4 Literatur zu Kapitel 18	488