

# Kapitel 7

## Klassische Laminattheorie

### 7.1 Einführung

Nachdem die vorhergehenden Kapitel alle notwendigen Grundlagen zur Behandlung des mechanischen Verhaltens eines Faserverbund-Materials bereitgestellt haben, sollen nun die Grundlagen der Berechnung von dünnen geschichteten Strukturen, sog. Laminaten, angegangen werden. Eine Literaturzusammenstellung, die der interessierte Leser für weitere Details heranziehen kann, findet sich am Ende dieses Kapitels.

Unter einem Laminat versteht man einen Mehrschicht-Verbund, der sich aus einer beliebigen Anzahl von Einzelschichten zusammensetzt. Die Eigenschaften der Einzelschichten (Material, Orientierung der Materialhauptachsen, Dicke der Schichten) sind hierbei beliebig. Eine schematische Darstellung ist in Abb. 7.1 gegeben. Im folgenden sollen nur Einzelschichten betrachtet werden, die durch unidirektionale Fasern verstärkt sind. Die Rechenregeln, die nachfolgend vorgestellt werden, gelten aber auch z.B. für Einzelschichten, die mit einem Fasergelege oder Fasergewebe (sog. Fabric) verstärkt sind. Die Richtung der unidirektionalen Fasern in Schicht  $i$  wird durch Angabe des Faserwinkels  $\theta_i$  festgelegt. Zur eindeutigen Angabe des Lagenaufbaus eines Laminats hat sich der sog. Laminat-Code bewährt. Hierbei werden die Einzelschichten anhand ihrer Faserorientierung gekennzeichnet, wobei von der untersten Schicht ausgehend in positive  $z$ -Richtung gezählt wird. Das Beispiel der Abb. 7.1 wird dann gemäß dem Laminat-Code wie folgt gekennzeichnet:

$$[0^\circ / + 45^\circ / 90^\circ / - 45^\circ / 0^\circ]. \quad (7.1)$$

Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass alle Schichten sowohl die gleichen Materialeigenschaften als auch die gleiche Dicke aufweisen. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist dies gesondert anzugeben. Bei Einzelschichten, die einen positiven Faserwinkel aufweisen, wird das '+'-Symbol oftmals weggelassen. Für das obige Beispiel ist dann eine gebräuchliche Schreibweise:

$$[0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / - 45^\circ / 0^\circ]. \quad (7.2)$$

Im Rahmen des Laminat-Codes haben sich einige Abkürzungen bewährt. Beispielsweise begnügt man sich bei symmetrischen Laminaten (das sind Lamine, bei denen man die obere Hälfte des Laminats durch Spiegelung der unteren Hälfte an der Laminat-Mittelebene erzeugen kann, z.B. ist die unterste Schicht mit der obersten Schicht identisch, während z.B. die zweite Schicht des Laminats mit der vorletzten Schicht übereinstimmt)

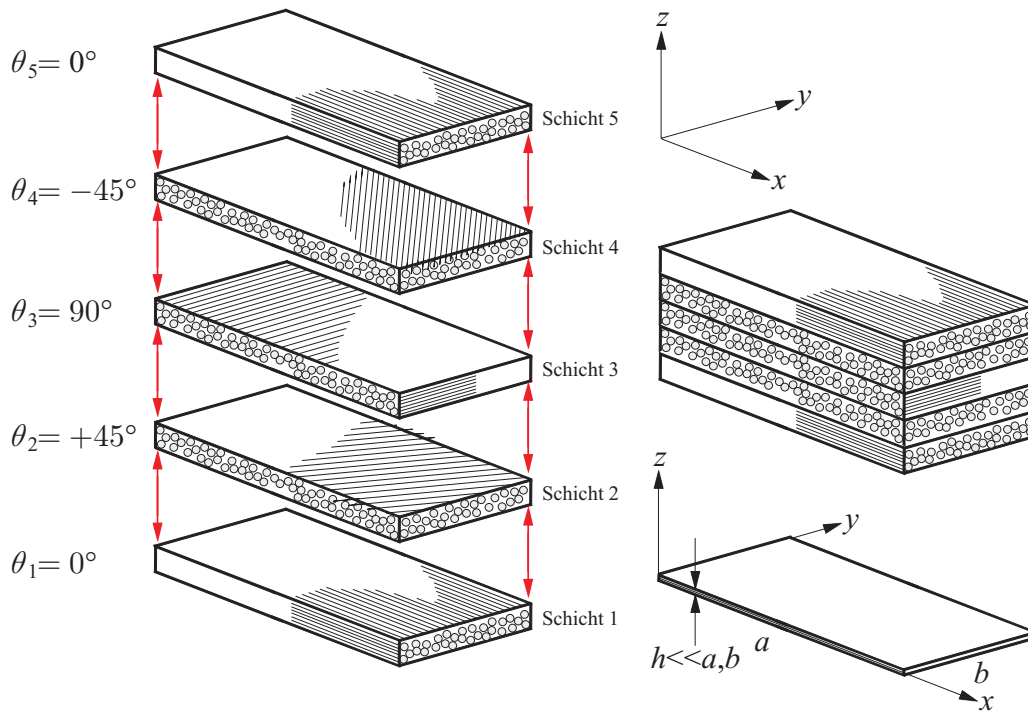


Abb. 7.1: Laminat-einzelschichten (links), zusammengesetztes Laminat (rechts); die Darstellung ist in Dickenrichtung stark übertrieben, reale Laminat sind im Vergleich mit der Länge und Breite in aller Regel als dünn anzusehen, also i. Allg.  $h \ll a, b$ .

damit, nur eine Hälfte der Schichten anzugeben und die eckigen Klammern mit dem Index  $S$  zu schließen. Ein Beispiel:

$$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ] = [0^\circ/90^\circ]_S. \quad (7.3)$$

Direkt aufeinanderfolgende Schichten mit gleichen, aber betragsmäßig unterschiedlichen Faserwinkeln werden mit dem  $'\pm'$ -Symbol zusammengefasst. Ein Beispiel:

$$[+45^\circ/-45^\circ] = [\pm 45]. \quad (7.4)$$

Kombinationen aus den beiden bisherigen Abkürzungen sind zulässig und üblich:

$$[+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ] = [\pm 45]_S. \quad (7.5)$$

Direkt hintereinander mehrfach auftretende Einzelschichten werden durch einen Index abgekürzt, der die Anzahl der mehrfach auftretenden Einzelschichten angibt:

$$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ] = [0^\circ/90^\circ_3/0^\circ]_S. \quad (7.6)$$

Die im weiteren verwendete Nomenklatur wird in Abb. 7.2 an einem Schnitt durch ein Laminat verdeutlicht: Das Laminat hat die Dicke  $h$  und besteht aus  $N$  beliebigen Schichten. Das Laminat wird durch die sog. Laminat-Mittelebene in zwei Hälften gleicher Dicke geteilt. Der Ursprung der Koordinaten  $x, y, z$  ist in dieser Mittelebene zu finden, wobei die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  die Laminat-Mittelebene aufspannen und  $z$  die Dickenrichtung ist. Hervorzuheben ist hier der Unterschied zwischen der Laminat-Mittelebene und der Symmetrie-Ebene eines Laminats. Die Laminat-Mittelebene teilt das Laminat in

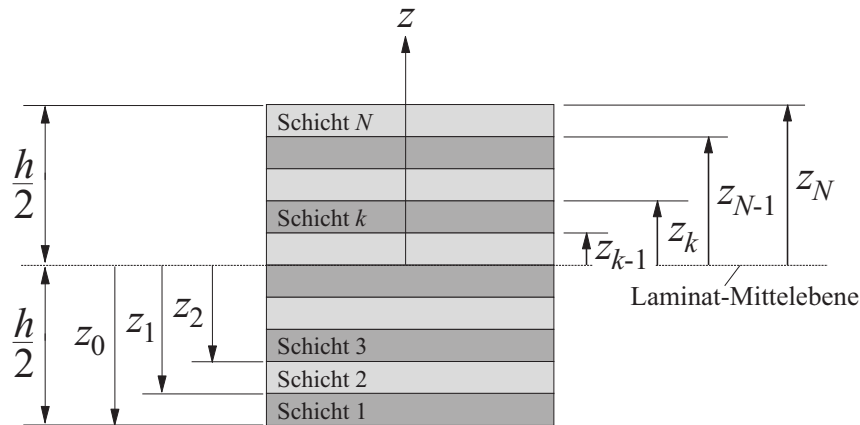


Abb. 7.2: Schnitt durch ein Laminat, Nomenklatur.

zwei gleich dicke Hälften (Teildicke  $\frac{h}{2}$ ) und ist damit eine rein geometrische Größe, die in keiner Weise etwas mit dem Lagenaufbau des Laminats zu tun hat. Hingegen existiert eine sog. Symmetrieebene nur dann, wenn man es auch tatsächlich mit einem symmetrischen Laminat zu tun hat. Ist eine Symmetrieebene vorhanden, so ist diese mit der Laminat-Mittelebene identisch.

Jede Einzelschicht  $k$  wird durch zwei Dicken-Koordinaten gekennzeichnet. Dies ist zum einen die Koordinate  $z_{k-1}$ , die die untere Grenze der Einzelschicht  $k$  beschreibt, zum anderen die Koordinate  $z_k$ , die die obere Grenzfläche der Schicht  $k$  auszeichnet. Die Berührungsfläche zwischen zwei Einzelschichten eines Laminats nennt man auch Interface. Beispielsweise findet sich an der Stelle  $z = z_1$  das Interface zwischen Schicht 1 und Schicht 2.

## 7.2 Voraussetzungen und Kinematik

Die Klassische Laminattheorie stellt eine sehr einfache Form einer Laminattheorie dar und ist eine Theorie, die Gültigkeit für dünne Lamine hat, wobei der Begriff 'dünn' quantitativ noch näher zu spezifizieren sein wird. Es sei hier aber festgehalten, dass von einem 'dünnen' Laminat ausgegangen werden darf, wenn die Dicke  $h$  wesentlich kleiner als die ebenen Abmessungen  $a$  und  $b$  des Laminats ist, wenn also  $h \ll a, b$  gilt (s. auch Abb. 7.1, Detail rechts unten).

Ziel der nachfolgenden Ausführungen ist es, aus der Kenntnis der Eigenschaften der Einzelschichten auf die Eigenschaften eines Laminats / Schichtverbundes zu schließen. Zur Herleitung der Klassischen Laminattheorie werden einige Annahmen hinsichtlich der Kinematik getroffen. Diese entsprechen der Anwendung der klassischen Kirchhoffschen Plattentheorie auf Lamine. Die Annahmen sind im Einzelnen:

- (i) Es wird ein perfektes Laminat vorausgesetzt. Perfekt soll an dieser Stelle bedeuten, dass ein perfekter Verbund / eine perfekte Verklebung zwischen den Einzelschichten besteht. Das Laminat ist ungeschädigt, und es bestehen keinerlei Schädigungen wie Delaminationen, Porigkeiten, Faserwelligkeiten u.ä.
- (ii) Es wird ein ebener Spannungszustand nicht nur in den Laminat-Einzelschichten, sondern auch im gesamten Laminat vorausgesetzt.

- (iii) Es wird die Kinematik einer Kirchhoff-Platte vorausgesetzt. Das bedeutet, dass die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte und die Normalenhypothese als gültig vorausgesetzt werden. Eine Gerade, die vor der Verformung normal zu der Laminat-Mittelebene steht, bleibt auch nach der Verformung eine Gerade und zudem normal zur verformten Laminat-Mittelebene.
- (iv) Die Dicke  $h$  des Laminats ändert sich während des gesamten Verformungsgeschehens nicht.

Die kinematischen Annahmen (iii) und (iv) sind in Abb. 7.3 verdeutlicht, in dem ein Plattenelement nach der Klassischen Laminattheorie im ausgelenkten Zustand dargestellt ist. Ein Punkt auf der Laminat-Mittelebene soll sich hierbei um die Längsverschiebung  $u_0$  und die Querverschiebung / Durchbiegung  $w_0$  bewegt haben. Das ausgelenkte Plattenelement hat dann die Neigung  $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  zur Laminat-Mittelebene. Als Verschiebungsgrößen werden die

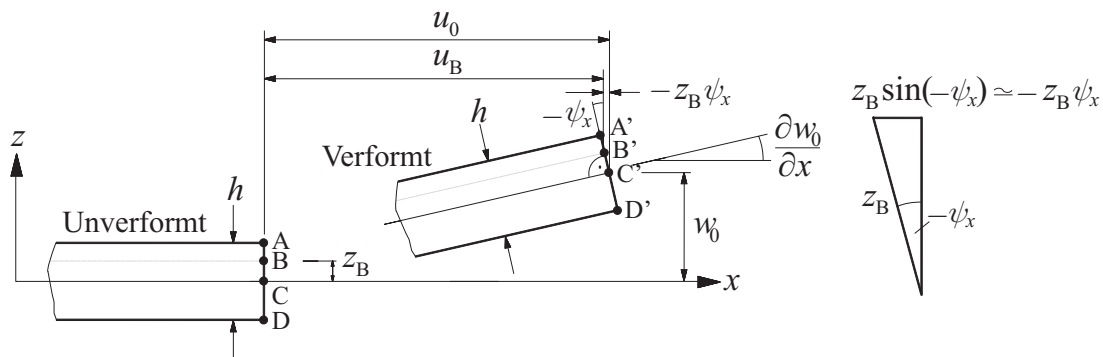


Abb. 7.3: Kinematik eines Laminats nach Klassischer Laminattheorie.

Verschiebungen  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$  der Laminat-Mittelebene eingeführt, wobei  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  ausschließlich von den ebenen Koordinaten  $x, y$  abhängen. Desweiteren seien  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  die Verschiebungen an einem beliebigen Punkt im Laminat und mithin abhängig von allen drei Koordinaten  $x, y, z$ . Desweiteren ergibt sich ein Biegewinkel  $\psi_x$ , der die Rotation des Querschnitts um die  $y$ -Achse beschreibt. Da ein Ebenbleiben der Querschnitte angenommen wird, ist  $\psi_x$  nur eine Funktion der ebenen Koordinaten  $x, y$ :  $\psi_x = \psi_x(x, y)$ . Analog ergibt sich ein zweiter Biegewinkel  $\psi_y(x, y)$ , der die Rotation des Querschnitts um die  $x$ -Achse beschreibt. Aufgrund der in Abb. 7.3 dargestellten Seitenansicht der Plattenelements ist der Biegewinkel  $\psi_y$  dort nicht sichtbar. Die in Abb. 7.3 gekennzeichneten Punkte B und C werden nun näher betrachtet, und es wird zunächst ein Zusammenhang zwischen der Längsverschiebung  $u_0$  der Mittelebene und der Längsverschiebung  $u_B$  des Punktes B gesucht. Man kann an Abb. 7.3 sofort ablesen:

$$u_B = u_0 - z_B \sin(-\psi_x) = u_0 + z_B \sin \psi_x. \tag{7.7}$$

Da kleine Winkel vorausgesetzt werden, kann näherungsweise  $\sin \psi_x \simeq \psi_x$  angesetzt werden (Abb. 7.3, rechts), und es verbleibt:

$$u_B = u_0 + z_B \psi_x. \tag{7.8}$$

Dieser Zusammenhang gilt für einen beliebigen Punkt auf dem Querschnitt an einer beliebigen Stelle  $z$ , so dass man diesen Zusammenhang generalisieren kann. Für die Längsverschiebung  $u$  eines beliebigen Punktes an der Stelle  $z$  gilt also:

$$u = u_0 + z \psi_x. \tag{7.9}$$

Eine analoge Beziehung kann man auch für die zweite ebene Verschiebung  $v$  anschreiben:

$$v = v_0 + z\psi_y. \quad (7.10)$$

Da die Klassische Laminattheorie auf der Annahme beruht, dass sich die Dicke des Laminats  $h$  nicht ändert, ist die Verschiebung bzw. Durchbiegung  $w$  stets identisch mit der Durchbiegung  $w_0$  der Laminat-Mittelebene:

$$w = w_0. \quad (7.11)$$

Schlussendlich kommt die Normalenhypothese ins Spiel, wonach eine Gerade, die im unverformten Zustand eine Normale zur Laminat-Mittelebene, ist auch im verformten Zustand eine Gerade und zudem eine Normale zur Laminat-Mittelebene bleibt. Damit bleibt der rechte Winkel zwischen Querschnitt und Laminat-Mittelebene erhalten, und man kann aus Abb. 7.3 ablesen:

$$-\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Analog gilt dann für  $\psi_y$ :

$$-\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (7.13)$$

Mit der eingeführten Kinematik stellt sich schließlich das Verschiebungsfeld nach der Klassischen Laminattheorie wie folgt dar:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (7.14)$$

### 7.3 Verzerrungen und Spannungen

Aus dem Verschiebungsfeld nach Klassischer Laminattheorie kann das zugehörige Verzerrungsfeld berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Es verbleiben also nur die drei ebenen Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  und  $\gamma_{xy}$ . Es ist üblich, die verbleibenden obigen Gleichungen vorteilhaft in einer Vektor-Schreibweise zusammenzufassen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0(x, y) \\ \varepsilon_{yy}^0(x, y) \\ \gamma_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0(x, y) \\ \kappa_{yy}^0(x, y) \\ \kappa_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Hierin sind  $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$  und  $\gamma_{xy}(x, y, z)$  die Dehnungen und Gleitung an einem beliebigen Punkt im Laminat, die sich aus den Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0(x, y)$ ,  $\varepsilon_{yy}^0(x, y)$  und der Gleitung  $\gamma_{xy}^0(x, y)$  der Laminatmittelebene, sowie den Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0(x, y)$ ,  $\kappa_{yy}^0(x, y)$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0(x, y)$  der Laminat-Mittelebene zusammensetzen (s. Abb. 7.4). Der hochgestellte Index '0' verdeutlicht hierbei, dass es sich um Größen handelt, die auf die Laminat-Mittelebene bezogen sind. Die Verzerrungen, Verkrümmungen und die

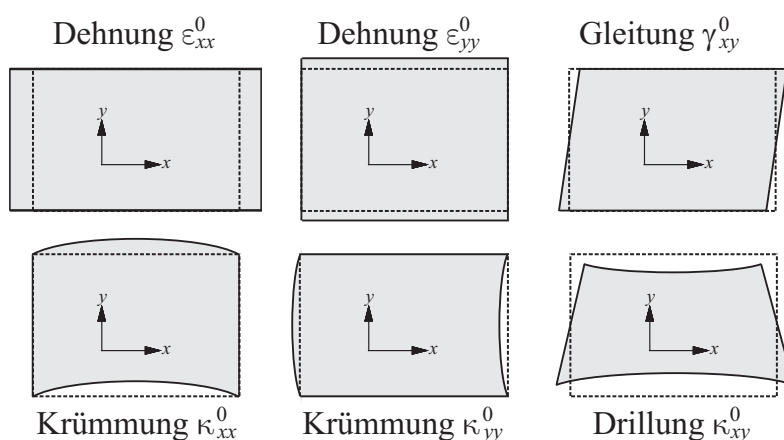


Abb. 7.4: Elementare Verformungszustände eines Laminats: Verzerrungen der Laminat-Mittelebene (oben), Verkrümmungen und Verdrillung der Laminat-Mittelebene (unten).

Verdrillung der Laminatenebene sind hierbei wie folgt definiert:

$$\underline{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}^0 = \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Sind die Verzerrungen, Verkrümmungen und Verdrillung der Laminat-Mittelebene einmal bekannt, so können aus dem Hookeschen Gesetz die schichtweisen Spannungen berechnet werden. Für die  $k$ -te Schicht eines Laminats ergibt sich exemplarisch:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right], \quad (7.18)$$

wobei  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$  gelten muss. Da die elastischen Eigenschaften der Einzelschichten aufgrund verschiedener Materialien oder Faserorientierungen unterschiedlich sein können, ergeben sich im Falle eines Laminats in den Interfaces benachbarter Schichten i.Allg.

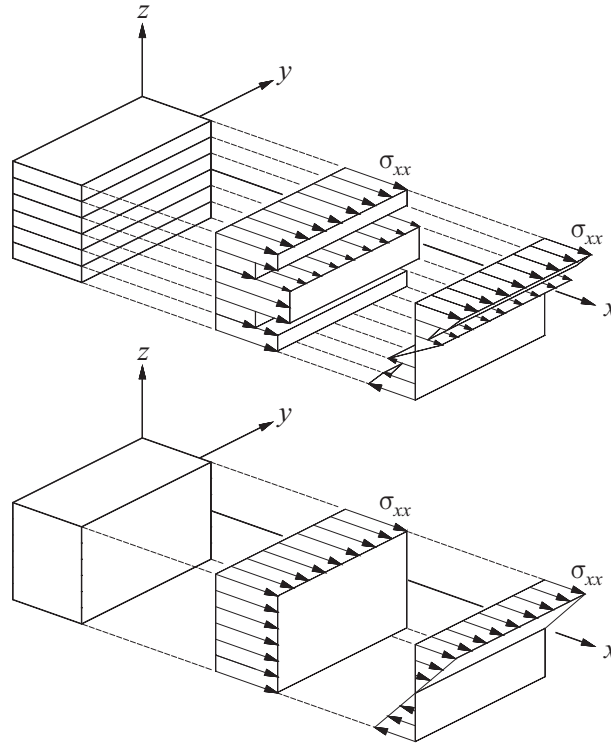


Abb. 7.5: Exemplarische Spannungsverläufe in einem Laminat (oben) und in einer isotropen Platte (unten).

Sprünge in den Spannungsverläufen, wie es in Abb. 7.5, oben, exemplarisch für die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  dargestellt ist. In Abb. 7.5 wurden die dargestellten Spannungen in Membranspannungen (Spannungsbild links) und Biegespannungen (Spannungsbild rechts) aufgeteilt. Während Erstere das Resultat der Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  und der Gleitung  $\gamma_{xy}^0$  der Laminatmittelebene sind, sind Letztere die Folge der Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$ . Es ist noch anzumerken, dass sich ein Laminat hinsichtlich der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt ganz ähnlich wie ein statisch unbestimmtes Balkensystem verhält. 'Steife' Schichten ziehen demnach große Spannungen an, während 'weiche' Schichten weniger beansprucht werden. Zum Vergleich zeigt Abb. 7.5, unten, außerdem qualitative Spannungsverläufe an einer isotropen Struktur unter Normalkraftbeanspruchung und Biegebeanspruchung. Natürlich treten die für ein Laminat typischen Sprünge in den Spannungsverteilungen hier nicht auf.

## 7.4 Konstitutives Laminat-Verhalten

Das Ziel der konstitutiven Gleichungen ist es, einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen im Laminat (dies sind die noch einzuführenden Laminat-Schnittkräfte und die Laminat-Schnittmomente) einerseits, und den sich einstellenden Verzerrungen, Verkrümmungen und Verdrillung andererseits mittels eines Materialgesetzes herzustellen. Dieses Materialgesetz wird in diesem Abschnitt schrittweise hergeleitet.

Als Schnittgrößen im Laminat werden die Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  pro Einheitsbreite und die Laminat-Schnittmomente  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$ ,  $M_{xy}^0$  pro Einheitsbreite eingeführt (Abb. 7.6). Die Schnittkräfte  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$  sind also Normalkräfte, wohingegen  $N_{xy}^0$

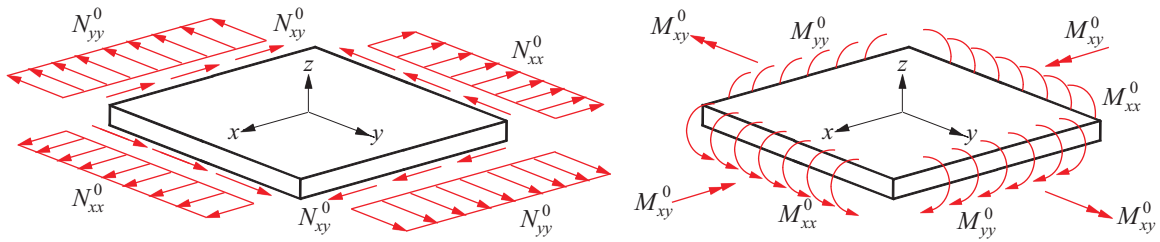


Abb. 7.6: Schnittgrößen im Laminat: Schnittkräfte (links), Schnittmomente (rechts).

eine Schubkraft ist. Die Schnittmomente  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$  sind Biegemomente, das Schnittmoment  $M_{xy}^0$  ist hingegen ein Drillmoment. Die Schnittkräfte haben stets die Einheit [Kraft / Längeneinheit] (also z.B. [N/mm]), während die Schnittmomente die Einheit [Kraft · Längeneinheit/Längeneinheit] (also z.B. [N]) haben. Damit sind die Laminat-Schnittkräfte streckenhaft verteilte Kräfte, die Laminat-Schnittmomente sind streckenhaft verteilte Momente.

Hinsichtlich der Bezeichnungen der Schnittmomente sind noch einige Kommentare notwendig. Im Gegensatz zur technischen Balkentheorie bezeichnen die Indizes der Laminatbiegemomente diejenige Spannungskomponente, durch die das Schnittmoment hervorgerufen wird. Demnach ist  $M_{xx}^0$  eine Folge der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  und ein Moment um die  $y$ -Achse. Hingegen ist der Index der Biegemomente eines Balkens üblicherweise genau anders herum definiert. Hier ruft dann die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  im Balken ein Biegemoment  $M_y$  hervor, das den Querschnitt um die  $y$ -Achse verdreht.

Die Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  lassen sich aus der Integration der zugehörigen Spannungen über die Dicke des Laminats berechnen:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz. \quad (7.19)$$

Die hierin geforderte Integration durch die Dicke  $h$  des Laminats kann bei einem Laminat i.Allg. nicht kontinuierlich durchgeführt werden, da die elastischen Eigenschaften schichtweise unterschiedlich sein können. Daher zerfällt das Integral über die Dicke  $h$  in  $N$  Teilintegrale:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz. \quad (7.20)$$

Analog können die Laminat-Schnittmomente als Resultierende der jeweiligen Spannungskomponenten, multipliziert mit dem Hebelarm  $z$ , ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz. \quad (7.21)$$



Ersetzt man hierin mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes die Spannungen durch die Verzerrungen, erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] dz, \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] z dz. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Führt man die hierin vorgeschriebenen Integrationen durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Hierin wurden die folgenden Abkürzungen vereinbart ( $i, j = 1, 2, 6$ ):

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz, \\ B_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz, \\ D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Die Größen  $A_{ij}$  werden Membransteifigkeiten, Dehnsteifigkeiten oder Scheibensteifigkeiten genannt. Sie stellen einen Zusammenhang zwischen den Laminat-Schnittkräften  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  einerseits, und den Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  der Laminatmittelebene andererseits her. Die Größen  $D_{ij}$  werden als Plattensteifigkeiten oder Biegesteifigkeiten bezeichnet und verbinden die Laminat-Schnittmomente  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$ ,  $M_{xy}^0$  mit den Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminat-Mittlebene.

Die Terme  $B_{ij}$  hingegen - meist als Koppelsteifigkeiten bezeichnet - stellen eine Besonderheit geschichteter Flächentragwerke dar. Durch sie werden die Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  mit den Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminat-Mittlebene gekoppelt. Zudem sorgen die Koppelsteifigkeiten für einen Zusammenhang zwischen den Laminat-Schnittmomenten  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$ ,  $M_{xy}^0$  und den Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  der Laminatmittelebene. Solche Koppelsterme tauchen bei homogenen Flächentragwerken wie z.B. einer isotropen Platte natürlich nicht auf.

Sind die Eigenschaften der Laminat einzelschichten im jeweiligen Intervall  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$  konstant, so können die Integrale in (7.24) einfach gelöst und in Summen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Üblicherweise schreibt man (7.23) in zusammengefasster Form:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Die so entstandene 'Materialmatrix' des Laminats wird als 'Laminat-Steifigkeitsmatrix', umgangssprachlich auch gerne als 'ABD-Matrix' bezeichnet. In symbolischer Form schreibt man auch:

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Der Sprachgebrauch ist hierbei häufig:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Membranquadrant} & \text{Koppelquadrant} \\ \text{Koppelquadrant} & \text{Plattenquadrant} \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Die Konstitutivbeziehung (7.26) berücksichtigt mit (7.24) den Lagenaufbau des Laminats sowie die elastischen Eigenschaften aller Einzelschichten. Weil die Steifigkeiten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$  in (7.24) durch Integrationen über die Dicke  $h$  des Laminats gewonnen werden, kann man sie als globale bzw. effektive Laminat-Eigenschaften verstehen. Die Klassische Laminattheorie verwendet damit also 'verschmierte' Kenngrößen  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$  für das Laminat, die als über die Dicke gemittelte Größen aufgefasst werden können. Man spricht dann auch von einer sog. 'Einschichttheorie', weil das Laminat rechnerisch auf seine Mittelebene mit entsprechenden 'Effektiveigenschaften'  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$  reduziert wird.

## 7.5 Koppeleffekte

Das Materialgesetz (7.26) impliziert, dass bei einer voll belegten Laminat-Steifigkeitsmatrix eine beliebige Schnittgröße alle Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  sowie beide Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  und auch die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminatmittelebene hervorruft. Abb. 7.7 zeigt dies für das Beispiel der Laminat-Schnittkraft  $N_{xx}^0$ . Offenbar sind bei beliebigen Laminaten i.Allg. sowohl das Scheiben- als auch das Plattenverhalten miteinander gekoppelt.

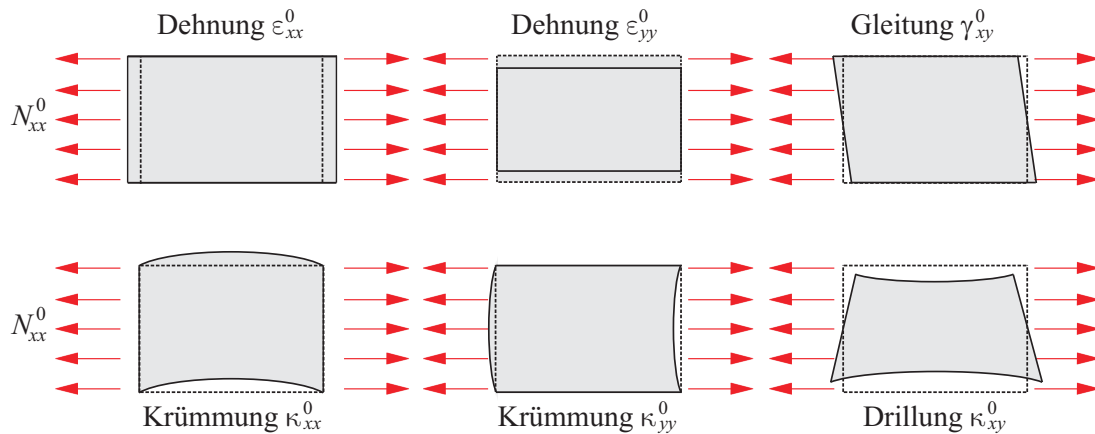


Abb. 7.7: Koppelwirkungen in einem beliebigen Laminat mit vollbelegter Laminat-Steifigkeitsmatrix: Verzerrungen der Laminat-Mittelebene (oben) und Verkrümmungen und Verdrillung der Laminat-Mittelebene (unten), hervorgerufen durch die Laminat-Schnittkraft  $N_{xx}^0$ .

An dieser Stelle zeigt sich, dass die gängige Unterscheidung ebener Flächentragwerke in 'Scheiben' und 'Platten' bei Laminaten keinen Sinn macht, da Schnittkräfte eine Plattenwirkung entfalten können, während Schnittmomente eine Membranwirkung nach sich ziehen können.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass diejenigen Steifigkeits-Komponenten in (7.26), die den Unterschied beispielsweise zu isotropen Flächentragwerken ausmachen, die Terme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  im Membranquadranten, die Terme  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  im Plattenquadranten, sowie alle Koppelsteifigkeiten  $B_{ij}$  sind. Die mit ihnen verbundenen Koppelwirkungen nennt man wie folgt:

- $A_{16}, A_{26}$  : Schubkopplung,
- $D_{16}, D_{26}$  : Biege-Drill-Kopplung,
- $B_{ij}$  : Biege-Dehn-Kopplung.

### 7.5.1 Schubkopplung

Eine Schubkopplung tritt in solchen Laminaten auf, bei denen die Terme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  nicht verschwinden. In solchen Laminaten sorgen Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  für ein Auftreten der Laminat-Schnittkraft  $N_{xy}^0$ . Eine Schubverzerrung  $\gamma_{xy}^0$  ruft hingegen die beiden Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$  und  $N_{yy}^0$  hervor. Ein Beispiel für das Auftreten der Schubkopplung ist eine Laminat-Einzelschicht, die um einen Winkel  $\theta$  gegenüber der  $x$ -Achse gedreht ist ('Off-axis-Schicht', Abb. 7.8).

Ein Laminat, dessen Schubkopplungs-Terme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  verschwinden, nennt man 'ausgeglichen'.

### 7.5.2 Biege-Drill-Kopplung

Laminat zeigen dann eine Biege-Drill-Kopplung (Abb. 7.9), wenn die Steifigkeiten  $D_{16}$  und  $D_{26}$  ungleich null sind. Die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  der Laminat-Mittelebene sind dann mit beteiligt an der Erzeugung des Drillmoments  $M_{xy}^0$ . Die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der

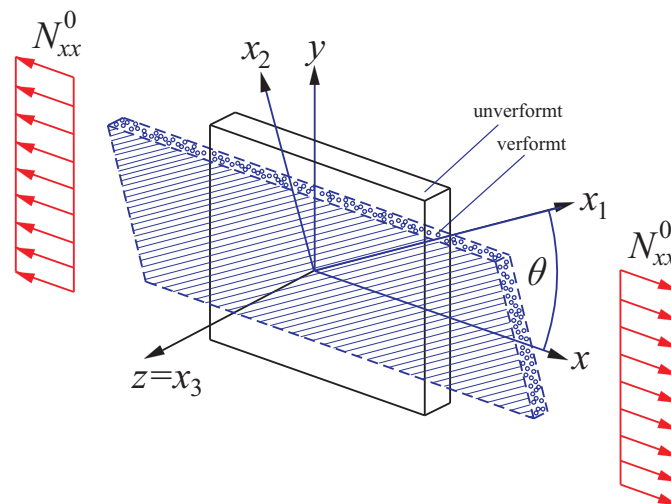


Abb. 7.8: Schubkopplung am Beispiel einer off-axis-Einzelschicht.

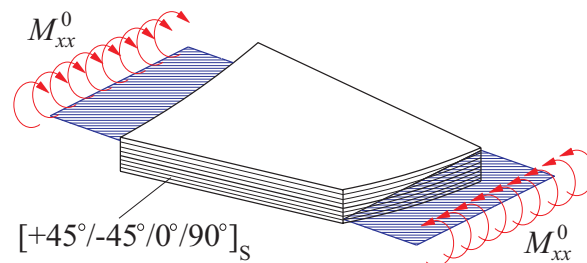


Abb. 7.9: Biege-Drill-Kopplung am Beispiel eines typischen Flugzeugbau-Laminats.

Laminat-Mittelebene andererseits ist dann mit die Ursache für die beiden Biegemomente  $M_{xx}^0$  und  $M_{yy}^0$ .

### 7.5.3 Biege-Dehn-Kopplung

Eine Biege-Dehn-Kopplung tritt immer dann auf, wenn eine oder mehrere Koppelsteifigkeiten  $B_{ij}$  ungleich null sind. Die Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$  der Laminat-Mittelebene rufen dann die Laminat-Schnittmomente  $M_{xx}^0, M_{yy}^0, M_{xy}^0$  hervor. Gleichzeitig sorgen die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0, \kappa_{yy}^0$  und die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminat-Mittelebene für ein Auftreten der Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$ . Beispiele sind in den Abbildungen 7.10 und 7.11 gegeben. Während am unsymmetrischen Kreuzverbund  $[0^\circ/90^\circ]$  die Koppelsteifigkei-

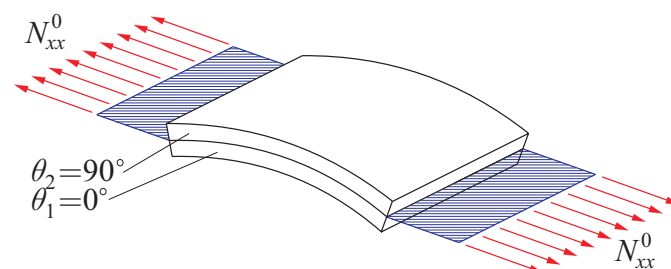


Abb. 7.10: Biege-Dehn-Kopplung am Beispiel eines unsymmetrischen Kreuzverbundes.

ten  $B_{11}$  und  $B_{22}$  auftreten, sind beim unsymmetrischen Winkelverbund  $[\pm 45^\circ]$  die Terme

$B_{16}$  und  $B_{26}$  ungleich null. Biege-Dehn-Kopplungen können nur bei unsymmetrischen La-

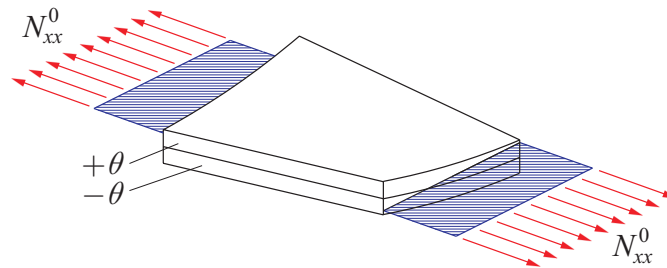


Abb. 7.11: Biege-Dehn-Kopplung am Beispiel eines unsymmetrischen Winkelverbundes.

minaten auftreten. Umgekehrt bedeutet das, dass ein symmetrisches Laminat stets frei von Biege-Dehn-Kopplungen ist:  $B_{ij} = 0$ .

#### 7.5.4 Anmerkungen zu Koppeleffekten

Koppeleffekte sind allgemein unerwünschte Begleiterscheinungen, die eine Spezialität im Umgang mit geschichteten Flächentragwerken darstellen und z.B. bei homogenen isotropen Flächentragwerken wie einer Aluminium-Platte nicht auftreten. Zum einen erschweren Koppeleffekte die Analyse einer Laminatstruktur z.T. erheblich, insbesondere dann, wenn man an einfachen analytischen Rechenverfahren interessiert ist, wie sie in der praktischen Ingenieursarbeit unerlässlich sind. Zum anderen können Koppeleffekte teilweise gravierende schwächende Auswirkungen auf das mechanische Verhalten eines Laminats haben.

Als Beispiel soll ein Laminat betrachtet werden, das unter einer Druckbelastung  $N_{xx}^0$  steht. Sofern das Laminat symmetrisch ist, wird es unter der Druckbelastung zu einem reinen Dehnungszustand  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0$  kommen (wobei hier angenommen wird, dass das Laminat ausgeglichen ist, so dass keine Gleitung  $\gamma_{xy}^0$  auftritt). Erst ab der Laststufe, ab der die Beullast des Laminats überschritten ist, werden sich die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0, \kappa_{yy}^0$  sowie die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  einstellen. Ist das Laminat hingegen unsymmetrisch, so werden bei noch so kleinen Lasten Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0, \kappa_{yy}^0$  und / oder die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  hervorgerufen. Für diesen spezifischen Fall kann man also festhalten, dass sich ein unsymmetrisches Laminat potentiell 'weicher' verhält, als es ein ähnliches symmetrisches Laminat tun wird.

Es gibt aber auch Beispiele, bei denen Koppeleffekte eine durchaus vorteilhafte Wirkung entfalten können. Betrachtet man nochmal das Beulverhalten eines Laminats, diesmal allerdings unter einer ebenen Schubbeanspruchung, so kann sich die Biege-Drill-Kopplung sowohl vorteilhaft als auch nachteilhaft auf die Höhe der erreichbaren Beullast auswirken, was grundsätzlich vom individuellen Lagenaufbau des Laminats abhängt. Hierzu folgen in den entsprechenden Abschnitten zur Stabilität der Lamine noch einige Ausführungen.

Es ist also in jedem Fall in das Ermessen des Anwenders gestellt zu entscheiden, ob Koppeleffekte toleriert werden können, ob sie vollständig vermieden werden müssen, oder ob sie sogar erwünscht sein können.

## 7.6 Spezielle Laminate

Der Fall einer vollbesetzten Laminat-Steifigkeitsmatrix im Konstitutivgesetz (7.26) ist in der praktischen Anwendung eher selten. In vielen wichtigen Fällen vereinfacht sich das Konstitutivgesetz erheblich.

### 7.6.1 Isotrope Einzelschicht

Im Falle einer isotropen Einzelschicht (was einer isotropen Platte bzw. Scheibe entspricht) vereinfacht sich die Steifigkeitsmatrix erheblich:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Ein solches Flächentragwerke ist also frei von allen Laminat-spezifischen Koppeleffekten, es treten demnach keine Schubkopplung, keine Biege-Dehn-Kopplung und keine Biege-Drill-Kopplung auf.

Die einzelnen Einträge der Steifigkeitsmatrix in (7.29) lassen sich unter Verwendung der Ingenieurkonstanten  $E$ ,  $G$  und  $\nu$  noch weiter spezifizieren:

$$\begin{aligned} A_{11} = Q_{11}h &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & A_{22} = Q_{22}h &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ A_{12} = Q_{12}h &= \frac{\nu Eh}{1-\nu^2}, & A_{66} = Q_{66}h &= Gh, \\ D_{11} = Q_{11}\frac{h^3}{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{22} = Q_{22}\frac{h^3}{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ D_{12} = Q_{12}\frac{h^3}{12} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{66} = Q_{66}\frac{h^3}{12} &= \frac{Gh^3}{12}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

### 7.6.2 Orthotrope Einzelschicht

Eine orthotrope Einzelschicht zeigt die gleiche Belegung der Steifigkeitsmatrix wie in (7.29), allerdings sind in den einzelnen Komponenten in  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{D}}$  nun die Ingenieurkonstanten  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  und  $G_{12}$  zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} A_{11} = Q_{11}h &= \frac{E_{11}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & A_{22} = Q_{22}h &= \frac{E_{22}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ A_{12} = Q_{12}h &= \frac{\nu_{12}E_{22}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & A_{66} = Q_{66}h &= G_{12}h, \\ D_{11} = Q_{11}\frac{h^3}{12} &= \frac{E_{11}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_{22} = Q_{22}\frac{h^3}{12} &= \frac{E_{22}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ D_{12} = Q_{12}\frac{h^3}{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_{66} = Q_{66}\frac{h^3}{12} &= \frac{G_{12}h^3}{12}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

### 7.6.3 Anisotrope Einzelschicht / Off-axis Einzelschicht

Für eine anisotrope Einzelschicht ergibt sich die folgende Belegung der Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

Eine anisotrope Einzelschicht zeigt zwar keine Biege-Dehn-Kopplung, allerdings treten i.Allg. sowohl die Schubkopplung als auch die Biege-Drill-Kopplung auf. Die einzelnen Terme in (7.32) kann man wie folgt anschreiben:

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij}h, \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12}. \quad (7.33)$$

### 7.6.4 Symmetrische Lamine

Ein symmetrisches Laminat ist immer frei von Biege-Dehn-Kopplung. Jedoch können sowohl die Schubkopplung als auch die Biege-Drill-Kopplung in keinem Fall von vorneherein ausgeschlossen werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

### 7.6.5 Kreuzverbunde

Ein Kreuzverbund beinhaltet nur Einzelschichten mit den Orientierungswinkeln  $\theta_k = 0^\circ$  oder  $\theta_k = 90^\circ$ . Solche Lamine sind stets ausgeglichen (Schubkopplungs-Terme  $A_{16} = A_{26} = 0$ ) und frei von Biege-Drill-Kopplung, also  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Ob Kreuzverbunde Biege-Dehn-Kopplung mit sich bringen, hängt davon ab, ob sie Symmetrieeigenschaften aufweisen oder nicht.

Ein Beispiel für einen unsymmetrischen Kreuzverbund ist das  $[0^\circ/90^\circ]$ -Laminat. In diesem Falle ist die Laminat-Steifigkeitsmatrix wie folgt belegt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Ein symmetrisches Kreuzverbund-Laminat der Art  $[0^\circ/90^\circ]_S$  ist hingegen frei von jeglicher Biege-Dehn-Kopplung, und es verbleibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

### 7.6.6 Winkelverbunde

Ein Winkelverbund ist ein Laminat, in dem zu jeder Schicht mit dem Winkel  $\theta$  eine Schicht mit dem entgegengesetzten Winkel  $-\theta$  existiert. Solche Laminate sind stets ausgeglichen ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ). Ob Biege-Drill-Kopplung und / oder Biege-Dehn-Kopplung auftritt, hängt vom konkreten Lagenaufbau ab.

Ein Beispiel für einen unsymmetrischen Winkelverbund ist ein Laminat der Bauweise  $[\pm\theta]$ . Die Laminat-Steifigkeitsmatrix hat hier die folgende Belegung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Ein solches Laminat ist demnach interessanterweise frei von Biege-Drill-Kopplung ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ), weist aber die Biege-Dehn-Kopplungs-Terme  $B_{16}$  und  $B_{26}$  auf.

Ein symmetrischer Winkelverbund der Art  $[\pm\theta]_S$  ist zwar naturgemäß frei von jeglicher Biege-Dehn-Kopplung, hingegen tritt aber Biege-Drill-Kopplung auf:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.38)$$

### 7.6.7 Quasi-isotrope Laminate

Quasi-isotrope Laminate finden z.B. im Flugzeugbau eine breite Anwendung und sind solche Schichtverbunde, deren Membranquadrant isotrope Eigenschaften aufweist. Es gilt dann  $A_{11} = A_{22}$  sowie  $A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12})$ . Ist das Laminat symmetrisch, so ergibt sich



die folgende Belegung der Laminat-Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Quasi-isotrope Laminare sind außerdem stets ausgeglichen und damit frei von Schubkopplung. Es ist aber sehr wichtig anzumerken, dass sich der Begriff der 'Quasi-Isotropie' nur auf den Membran-Quadranten bezieht und daraus keine Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Plattenquadranten gezogen werden dürfen. Dieser bleibt in seinen Eigenschaften i.Allg. anisotrop, d.h.  $D_{11} \neq D_{22}$ . Zudem kann eine Biege-Drill-Kopplung nicht generell ausgeschlossen werden, was i.Allg.  $D_{16}, D_{26} \neq 0$  bedeutet. Ob ein quasi-isotropes Laminat Biege-Dehn-Kopplung zeigt, hängt von seinen Symmetrieeigenschaften ab.

Beispiele für quasi-isotrope Laminare sind  $[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$ ,  $[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]_S$ ,  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$ ,  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_S$ ,  $[0^\circ/-36^\circ/-72^\circ/36^\circ/72^\circ]$ , und viele andere.

## 7.7 Wechsel der Bezugsebene

In vielen technischen Anwendungen kommt es vor, dass zwei Laminatbauteile zusammengefügt werden. Dann stellt sich die Frage, wie man die unterschiedlichen Mittelebenen der beteiligten Laminataufbauten rechnerisch miteinander in Einklang bringt. Dies kann durch die Verschiebung der Bezugsebene eines der beiden Bauteile oder beider Bauteile geschehen (s. Abb. 7.12). Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass der Ort  $z = 0$

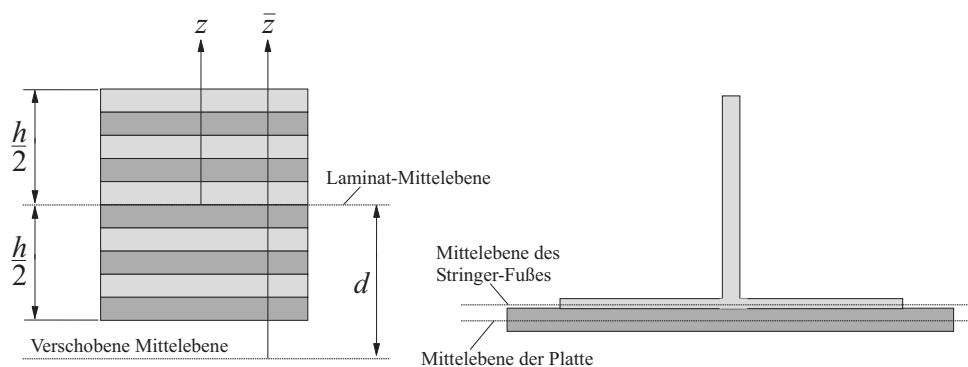


Abb. 7.12: Verschiebung der Bezugsebene eines Laminats (links), Anwendungsfall: Platte mit Stringer (rechts).

nicht der Ort der Laminat-Mittelebene ist, sondern die Laminat-Mittelebene vielmehr um das Maß  $d$  verschoben ist, und es soll geklärt werden, wie sich in diesem Falle die Laminat-Steifigkeitsmatrix berechnen lässt. Zwischen der verschobenen Achse  $\bar{z}$  und der ursprünglichen Achse  $z$  gilt der Zusammenhang  $\bar{z} = z + d$ .

Zunächst werden die resultierenden Laminat-Schnittkräfte betrachtet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \int_{d-\frac{h}{2}}^{d+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \bar{z} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] d\bar{z} \\ &= \int_{d-\frac{h}{2}}^{d+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} (\underline{\varepsilon}^0 + \bar{z} \underline{\kappa}^0) d\bar{z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} \underline{\varepsilon}^0 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} (z+d) \underline{\kappa}^0 dz. \end{aligned} \quad (7.40)$$

In den beiden letzten Integralausdrücken tauchen offensichtlich sowohl die Membransteifigkeitsmatrizen  $\underline{\underline{A}}$  als auch die Koppelsteifigkeitsmatrizen  $\underline{\underline{B}}$  auf, so dass man letztlich erhält:

$$\begin{aligned} \underline{N} = \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{A}} \underline{\varepsilon}^0 + (\underline{\underline{B}} + d \underline{\underline{A}}) \underline{\kappa}^0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Ganz analog kann man bei Ermittlung der Laminat-Schnittmomente vorgehen:

$$\begin{aligned} \underline{M} = \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \int_{d-\frac{h}{2}}^{d+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \bar{z} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] \bar{z} d\bar{z} \\ &= \int_{d-\frac{h}{2}}^{d+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} (\underline{\varepsilon}^0 + \bar{z} \underline{\kappa}^0) \bar{z} d\bar{z} \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} \underline{\varepsilon}^0 (z+d) dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{\underline{Q}} \underline{\kappa}^0 (z+d)^2 dz. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man die folgende Darstellung für die Laminat-Schnittmomente:

$$\underline{M} = (\underline{\underline{B}} + d \underline{\underline{A}}) \underline{\varepsilon}^0 + (\underline{\underline{D}} + 2d \underline{\underline{B}} + d^2 \underline{\underline{A}}) \underline{\kappa}^0. \quad (7.43)$$

Man kann also für den Fall der um das Maß  $d$  verschobenen Laminat-Mittelebene das Konstitutiv-Gesetz für das Laminat anschreiben als:

$$\begin{pmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & (\underline{\underline{B}} + d \underline{\underline{A}}) \\ (\underline{\underline{B}} + d \underline{\underline{A}}) & (\underline{\underline{D}} + 2d \underline{\underline{B}} + d^2 \underline{\underline{A}}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

## 7.8 Effektiv-Eigenschaften von Laminaten

Für die praktische Anwendung ist es oftmals notwendig, Aussagen über die Ingenieurkonstanten  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $G_{xy}$  und  $\nu_{xy}$  eines Laminats zu treffen. Nachfolgend wird aufgezeigt, wie man diese sog. Effektiv-Eigenschaften aus den Einträgen der Laminat-Steifigkeitsmatrix berechnen kann.

Der Einfachheit halber sollen in diesem Abschnitt nur symmetrische Laminata betrachtet werden, die keine Schubkopplung und keine Biege-Drill-Kopplung aufweisen. Die Laminat-Steifigkeitsmatrix wird dann durch (7.36) beschrieben. Die Erweiterung auf Laminataufbauten, die Koppelwirkungen aufweisen, ist aber in der gleichen Art problemlos möglich.

### 7.8.1 Ebener Elastizitätsmodul $E_{xx}$

Betrachtet wird ein Laminat unter einer einachsigen Beanspruchung  $N_{xx}^0$ . Die Laminat-Schnittkräfte  $N_{yy}^0$  und  $N_{xy}^0$  seien null:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Aus der zweiten Gleichung gewinnt man:

$$\varepsilon_{yy}^0 = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_{xx}^0. \quad (7.46)$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert:

$$N_{xx}^0 = A_{11}\varepsilon_{xx}^0 - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}\varepsilon_{xx}^0 = \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \varepsilon_{xx}^0. \quad (7.47)$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch die Laminatdicke  $h$ , erhält man die zugehörige Spannung  $\sigma_{xx}$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{xx}^0}{h} = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \varepsilon_{xx}^0. \quad (7.48)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für die Spannung  $\sigma_{xx}$  mit dem Hookeschen Gesetz  $\sigma_{xx} = E_{xx}\varepsilon_{xx}$ , so kann man den effektiven ebenen Elastizitätsmodul für das Laminat ablesen:

$$E_{xx} = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right). \quad (7.49)$$

### 7.8.2 Ebener Elastizitätsmodul $E_{yy}$

Die Vorgehensweise zur Ermittlung des effektiven Elastizitätsmoduls  $E_{yy}$  funktioniert analog zur Berechnung von  $E_{xx}$ . Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_{yy}^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

erhält man aus der ersten Gleichung:

$$\varepsilon_{xx}^0 = -\frac{A_{12}}{A_{11}}\varepsilon_{yy}^0. \quad (7.51)$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$N_{yy}^0 = -\frac{A_{12}^2}{A_{11}}\varepsilon_{yy}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0 = \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \varepsilon_{yy}^0. \quad (7.52)$$

Division durch die Laminatdicke  $h$  und Vergleich mit dem Hookeschen Gesetz liefert den folgenden Ausdruck für den effektiven ebenen Elastizitätsmodul  $E_{yy}$  des Laminats:

$$E_{yy} = \frac{1}{h} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right). \quad (7.53)$$

### 7.8.3 Ebener Gleitmodul $G_{xy}$

Betrachtet man nun das Laminat unter einer ebenen Schubbeanspruchung  $N_{xy}^0$  und geht man von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

aus, so liefert die dritte Gleichung:

$$N_{xy}^0 = A_{66} \gamma_{xy}^0. \quad (7.55)$$

Teilt man diesen Ausdruck durch die Laminatdicke  $h$ , erhält man die zugeordnete Schubspannung  $\tau_{xy}$ :

$$\tau_{xy} = \frac{A_{66}}{h} \gamma_{xy}^0. \quad (7.56)$$

Der Vergleich mit dem Hookeschen Gesetz  $\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}$  ergibt dann den folgenden effektiven Gleitmodul des Laminats:

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{h}. \quad (7.57)$$

### 7.8.4 Ebene Querdehnungszahl $\nu_{xy}$

Betrachtet wird nun wieder das Laminat unter einachsiger Beanspruchung  $N_{xx}^0$ :

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.58)$$

Definitionsgemäß gilt für die Querdehnungszahl  $\nu_{xy}$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{yy}^0}{\varepsilon_{xx}^0}. \quad (7.59)$$

Man erhält aus dem obigen Konstitutivgesetz nach wenigen Umformungen die folgenden Ausdrücke für die Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$  und  $\varepsilon_{yy}^0$  der Laminat-Mittelebene:

$$\varepsilon_{xx}^0 = N_{xx}^0 \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \varepsilon_{yy}^0 = -N_{xx}^0 \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}. \quad (7.60)$$

Daraus folgt für die ebene Querdehnungszahl  $\nu_{xy}$  des Laminats:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{yy}^0}{\varepsilon_{xx}^0} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (7.61)$$

### 7.8.5 Elastizitätsmodul $E_{xx,B}$ unter Biegung

Es ist wichtig, bei der Ermittlung eines effektiven Elastizitätsmoduls zwischen Membranbeanspruchung und Biegebeanspruchung zu unterscheiden. Betrachtet man ein symmetrisches Laminat ohne Biege-Drill-Kopplung, dann gilt unter einachsiger Biegebeanspruchung  $M_{xx}^0$ :

$$\begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$D_{12}\kappa_{xx}^0 + D_{22}\kappa_{yy}^0 = 0. \quad (7.63)$$

Auflösen nach  $\kappa_{yy}^0$  und Einsetzen in die erste Gleichung liefert:

$$M_{xx}^0 = D_{11}\kappa_{xx}^0 - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}\kappa_{xx}^0 = \left(D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}\right)\kappa_{xx}^0 = -\left(D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \quad (7.64)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Differentialgleichung der Biegelinie des Euler-Bernoulli-Balkens  $-EI\frac{d^2 w}{dx^2} = M$ , so erhält man:

$$E_{xx,B}I = D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, \quad (7.65)$$

wobei  $I = \frac{h^3}{12}$  das Flächenträgheitsmoment des Laminatquerschnittes pro Längeneinheit ist. Der effektive Elastizitätsmodul  $E_{xx,B}$  des Laminats unter Biegung lautet dann:

$$E_{xx,B} = \frac{1}{I} \left(D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}\right) = \frac{12}{h^3} \left(D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}\right). \quad (7.66)$$

### 7.8.6 Elastizitätsmodul $E_{yy,B}$ unter Biegung

Die Herleitung eines Ausdrucks für  $E_{yy,B}$  verläuft analog zu dem zu  $E_{xx,B}$  Gesagten. Es folgt:

$$E_{yy,B} = \frac{12}{h^3} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right). \quad (7.67)$$

Hinsichtlich der effektiven Eigenschaften  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $E_{xx,B}$  und  $E_{yy,B}$  sind noch einige Anmerkungen notwendig. Allgemein werden sich durch die Anisotropie eines Laminats nicht nur die Effektiv-Eigenschaften  $E_{xx}$  und  $E_{yy}$  voneinander unterscheiden, sondern es werden sich Unterschiede zwischen den Effektiv-Eigenschaften unter reiner Membranbeanspruchung und reiner Biegung ergeben. Das ist bei einem rein isotropen Tragwerk natürlich anders, hier sind der ebene Elastizitätsmodul  $E$  und der Elastizitätsmodul unter Biegung  $E_B$  nämlich stets gleich und darüber hinaus natürlich auch nicht richtungsabhängig.

Zur Erläuterung seien zwei einfache Kreuzverbund-Lamine mit den Aufbauten  $[0^\circ/90^\circ]_S$  und  $[90^\circ/0^\circ]_S$  betrachtet (Abb. 7.13). Werden die beiden Kreuzverbund-Lamine unter

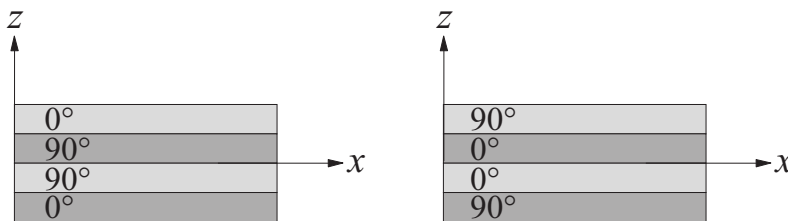


Abb. 7.13: Kreuzverbund-Lamine  $[0^\circ/90^\circ]_S$  und  $[90^\circ/0^\circ]_S$ .

eine einachsige Beanspruchung  $N_{xx}^0$  gesetzt, so wird sich zeigen, dass in beiden Fällen der effektive Elastizitätsmodul  $E_{xx}$  identisch sein wird. Die Zugsteifigkeit wird in diesem Fall

nicht von der Reihenfolge der Schichten beeinflusst. Anders wird sich das aber verhalten, wenn die beiden Laminare unter einer Biegebeanspruchung  $M_{xx}^0$  betrachtet werden. Hier werden sich im Vergleich zu den ebenen Steifigkeiten  $E_{xx}$  nicht nur andere Werte für die effektiven Eigenschaften  $E_{xx,B}$  ergeben, sondern diese werden für die beiden betrachteten Laminare sogar unterschiedlich ausfallen. Es wird sich konkret herausstellen, dass  $E_{xx,B}^{[0/90]_S} > E_{xx,B}^{[90/0]_S}$  gilt. Der Grund hierfür liegt darin, dass die  $0^\circ$ -Schichten eine hohe Steifigkeit mit sich bringen, wohingegen die  $90^\circ$ -Schichten im Vergleich eine wesentlich kleinere Steifigkeit in  $x$ -Richtung aufweisen. Da die  $0^\circ$ -Schichten im  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Kreuzverbund außen liegen, bringen sie einen entsprechend hohen Steiner-Anteil mit sich, der für eine große Biegesteifigkeit des Laminats sorgt. Hingegen liegen die  $0^\circ$ -Schichten im Kreuzverbund  $[90^\circ/0^\circ]_S$  nahe der Laminat-Mittelebene, so dass ihr Beitrag zur Biegesteifigkeit hier geringer ausfällt. Es zeigt sich also, dass bei der Ermittlung der effektiven Eigenschaften eines Laminats unter Umständen nicht nur nach der Richtung der Beanspruchung, sondern auch sorgfältig nach der Art der Beanspruchung unterschieden werden muss.

### 7.8.7 Überschlägige Berechnung von Effektiv-Eigenschaften

Für den Fall einer rein ebenen Beanspruchung symmetrischer Kreuzverbund-Laminare werden oftmals die folgenden Überschlagsformeln verwendet:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{N_0}{N} E_{11} + \frac{N_{90}}{N} E_{22}, \\ E_{yy} &= \frac{N_{90}}{N} E_{11} + \frac{N_0}{N} E_{22}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Hierbei sind  $N$ ,  $N_0$ ,  $N_{90}$  die Gesamtanzahl der Schichten im Kreuzverbund-Laminat, sowie die Anzahl der  $0^\circ$ -Schichten und der  $90^\circ$ -Schichten.

Bei beliebig aufgebauten, aber symmetrischen Laminaten sind die folgenden Formeln recht weit verbreitet:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} E_{xx,i}, \\ E_{yy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} E_{yy,i}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Weitere Überschlagsformeln existieren, bleiben aber an dieser Stelle ohne weitere Betrachtung.

## 7.9 Formänderungsenergie eines Laminats

Für die Anwendung energiebasierter Verfahren zur Analyse von Laminat-Problemen ist es notwendig, Kenntnis über die Verzerrungsenergie bzw. das innere Potential  $\Pi_i$  zu haben. Die Formänderungsenergie  $\Pi_i$  erhält man aus

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dV, \quad (7.70)$$

wobei im Rahmen der klassischen Laminattheorie wegen der angenommenen Schubstarrheit bezüglich der Dickenrichtung und der Annahme eines ebenen Spannungszustandes im gesamten Laminat nur der folgende Ausdruck verbleibt:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV. \quad (7.71)$$

Setzt man für die Verzerrungen die Ausdrücke nach der Klassischen Laminattheorie

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (7.72)$$

ein, so geht (7.71) über in:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int \int \int_V \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \sigma_{yy} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Spaltet man das Volumenintegral in (7.73) in Integrale bezüglich  $x, y, z$  auf und multipliziert man die Klammerausdrücke aus, erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \sigma_{xx} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \sigma_{yy} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2\tau_{xy} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] dz dy dx. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Unter Beachtung der Definitionen der Laminat-Schnittgrößen

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz, \quad \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (7.75)$$

kann man die in (7.74) vorgesehene Integration bezüglich  $z$  durchführen und erhält in Vektor-Schreibweise:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} dx dy. \quad (7.76)$$

Einsetzen des konstitutiven Gesetzes

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (7.77)$$

liefert:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \dots \right] dx dy, \end{aligned} \quad (7.78)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right. \\ &\quad + 2A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2A_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad + A_{66} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &\quad - 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2B_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - 2B_{16} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\ &\quad - 2B_{26} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\ &\quad - 4B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ &\quad + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad \left. + \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Die Ausdrücke (7.78) bzw. (7.79) werden im weiteren Verlauf dieses Buches noch in vielfältiger Weise zum Einsatz kommen.



## 7.10 Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung bei unsymmetrischen Laminaten

Der Einfluss der Biege-Dehn-Kopplung kann bei der Analyse eines Laminats u.U. erheblich werden. So werden sich bei einem Laminatproblem mit vorliegender Biege-Dehn-Kopplung im Vergleich mit einem ähnlichen, aber symmetrischen Laminat allgemein größere Verformungen und damit einhergehend eine geringere Steifigkeit zeigen. Darüber hinaus kann Biege-Dehn-Kopplung der Grund dafür sein, dass ein unsymmetrisches Laminat geringere Beullasten und niedrigere Eigenfrequenzen aufweist als ein vergleichbares Laminat ohne Biege-Dehn-Kopplung. Naturgemäß muss daher die Biege-Dehn-Kopplung geeignet in der Berechnung berücksichtigt werden. Allerdings - und das werden die weiteren Kapitel dieses Buches noch zeigen - bringt das z.T. erhebliche Schwierigkeiten in der Analyse mit sich, vor allem dann, wenn man Interesse an einfachen analytischen Rechenverfahren hat, die ohne großen numerischen Aufwand auskommen. Als guter Kompromiss für eine ganze Reihe von praktisch relevanten ingenieurtechnischen Fragestellungen hat sich daher die näherungsweise Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung erwiesen, die auf dem Ansetzen von sog. 'reduzierten Plattensteifigkeiten' und dem Analysieren eines 'ähnlichen' symmetrischen Laminats beruht. Das soll nachfolgend erläutert werden. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das konstitutive Gesetz für das Laminat gemäß

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.80)$$

Für die Laminat-Schnittkräfte gilt:

$$\underline{N}^0 = \underline{A}\underline{\varepsilon}^0 + \underline{B}\underline{\kappa}^0. \quad (7.81)$$

Löst man diesen Ausdruck nach den Verzerrungen der Laminat-Mittelebene auf, erhält man:

$$\underline{\varepsilon}^0 = \underline{A}^{-1}\underline{N}^0 - \underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{\kappa}^0 \quad (7.82)$$

Setzt man dies in die Laminat-Schnittmomente ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{M}^0 &= \underline{B}\underline{\varepsilon}^0 + \underline{D}\underline{\kappa}^0 \\ &= \underline{B}(\underline{A}^{-1}\underline{N}^0 - \underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{\kappa}^0) + \underline{D}\underline{\kappa}^0 \\ &= \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{N}^0 + (\underline{D} - \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{B})\underline{\kappa}^0. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Damit kann man das Konstitutivgesetz (7.80) in teilinvertierter Form anschreiben als:

$$\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{M}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{A}} & \widehat{\underline{B}} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix}, \quad (7.84)$$

wobei:

$$\widehat{\underline{A}} = \underline{A}^{-1}, \quad \widehat{\underline{B}} = -\underline{A}^{-1}\underline{B}, \quad \widehat{\underline{D}} = \underline{D} - \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{B}. \quad (7.85)$$

Die Formänderungsenergie  $\Pi_i$  lässt sich darstellen als:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (N_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy}^0 \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy}^0 \gamma_{xy}^0 + M_{xx}^0 \kappa_{xx}^0 + M_{yy}^0 \kappa_{yy}^0 + M_{xy}^0 \kappa_{xy}^0) dx dy. \quad (7.86)$$

Setzt man die Verzerrungen der Laminatmittelebene sowie die Laminat-Schnittmomente gemäß (7.84) ein, ergibt es sich, dass sich alle Terme, die mit den teilinvertierten Koppelsteifigkeiten einhergehen, aus der Formänderungsenergie herausheben und der folgende Ausdruck verbleibt:

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left( \widehat{A}_{11} N_{xx}^0{}^2 + \widehat{A}_{22} N_{yy}^0{}^2 + \widehat{A}_{66} N_{xy}^0{}^2 + 2\widehat{A}_{12} N_{xx}^0 N_{yy}^0 + 2\widehat{A}_{16} N_{xx}^0 N_{xy}^0 \right. \\ & + 2\widehat{A}_{26} N_{yy}^0 N_{xy}^0 + \widehat{D}_{11} \kappa_{xx}^0{}^2 + \widehat{D}_{22} \kappa_{yy}^0{}^2 + \widehat{D}_{66} \kappa_{xy}^0{}^2 + 2\widehat{D}_{12} \kappa_{xx}^0 \kappa_{yy}^0 \\ & \left. + 2\widehat{D}_{16} \kappa_{xx}^0 \kappa_{xy}^0 + 2\widehat{D}_{26} \kappa_{yy}^0 \kappa_{xy}^0 \right) dx dy. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Es zeigt sich also, dass es auf den Energiehaushalt des Laminats keinen Einfluss hat, ob man die teilinvertierten Koppelsteifigkeiten  $\widehat{\underline{B}}$  berücksichtigt oder nicht, so dass man ein unsymmetrisches Laminat in guter Näherung als ein symmetrisches Laminat betrachten kann, wobei allerdings die Plattensteifigkeiten  $\underline{\underline{D}}$  durch die 'reduzierten Plattensteifigkeiten'

$$\underline{\underline{\widehat{D}}} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \quad (7.88)$$

ersetzt werden müssen. In der Tat zeigen viele Beispiele aus der Ingenieurpraxis, dass man mit diesem Konzept oftmals gute Ergebnisse erzielt.

## 7.11 Literatur zu Kapitel 7

**Altenbach H, Altenbach J, Rikards R (1996):** *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*, Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie, Stuttgart.

**Altenbach H, Altenbach J, Naumenko K (1998):** *Ebene Flächentragwerke*, Springer Verlag, Berlin et al.

**Ambartsumyan SA (1970):** *Theory of anisotropic plates*, Technomic Publishing Co., Inc., Stamford, USA.

**Ashton JE, Whitney JM (1970):** *Theory of laminated plates*, Technomic Publishing Co., Inc., Stamford, USA.

**Bert CW (1975):** *Analysis of plates*, in: Composite materials, volume 7, Structural design and analysis, part I, Academic Press, New York et al., USA.

**Frick A, Klamser H (1990):** *Untersuchung der Verschiebungs- und Spannungsverteilungen an unbelasteten Rändern multidirektionaler Laminat*, VDI Verlag, Düsseldorf.

**Herakovich CT (1998):** *Mechanics of fibrous composites*, John Wiley and Sons, Inc., New York et al., USA.

**Jones RM (1975):** *Mechanics of composite materials*, Scripta Book Co., Washington, USA.

**Lekhnitskii SG (1968):** *Anisotropic plates*, Gordon and Breach, New York et al., USA.

**Niederstadt G, Block J, Geier B, Rohwer K, Weiß R (1985):** *Leichtbau mit kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen*, Expert Verlag, Sindelfingen.

**Ochoa OO, Reddy JN (1992):** *Mechanics of composite materials*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht et al., Niederlande.

**Reddy JN (2004):** *Mechanics of laminated composite plates and shells (2nd edition)*, CRC Press Boca Raton et al., USA.

**Reissner E, Stavsky Y (1961):** *Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates*, Journal of Applied Mechanics 28:402-408.

**Tsai SW, Hahn HT (1980):** *Introduction to composite materials*, Technomic Publishing Co., Inc., Lancaster et al., UK.

**Wiedemann J (1962a):** *Beitrag zum Problem orthotroper Platten ohne allgemeine Neutralebene - I: Elastische Symmetrieeigenschaften anisotroper Platten und ihr Einfluß auf die Besetzung der Elastizitätsmatrix der Platte*, Luftfahrttechnik 8:283-289.

**Wiedemann J (1962b):** *Beitrag zum Problem orthotroper Platten ohne allgemeine Neutralebene - III: Zum Beulproblem antimetrischer und exzentrischer orthotroper Rechteckplatten*, Luftfahrttechnik 9:118-130.

**Wiedemann J (1963):** *Beitrag zum Problem orthotroper Platten ohne allgemeine Neutralebene - II: Zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten anisotroper Platten*, Luftfahrttechnik 9:73-82.

**Wiedemann J (1996):** *Leichtbau 1 -Elemente*, 2.Auflage, Springer Verlag, Berlin et al.