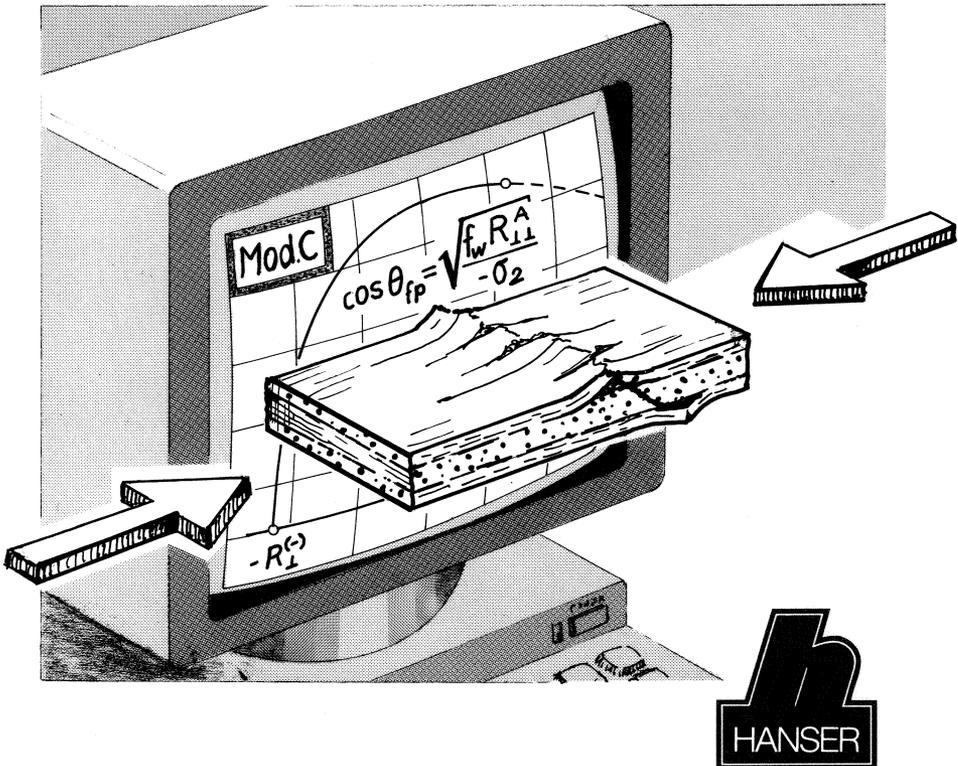


A. Puck

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten

Modelle für die Praxis



h
HANSER

Puck
Festigkeitsanalyse von
Faser-Matrix-Laminaten

Alfred Puck

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten

Modelle für die Praxis



Carl Hanser Verlag München Wien

Der Autor:

Professor Dr.-Ing. Alfred Puck, Immenhausen-Mariendorf

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Puck, Alfred:

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten : Modelle für
die Praxis / Alfred Puck. - München ; Wien : Hanser, 1996
ISBN 3-446-18194-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 1996 Carl Hanser Verlag München Wien
Umschlaggestaltung: Kaselow Design, München,
unter Verwendung eines Bildes von Prof. Dr.-Ing. A. Puck
Datenbelichtung: Wolfram's Doku Werkstatt, Attenkirchen
Gesamtherstellung: Joh. Walch GmbH & Co., Augsburg
Printed in Germany

Geleitwort und Widmung

In den 50-er Jahren studierte der Autor an der Ingenieurschule Hamburg und der Technischen Hochschule Darmstadt Maschinenbau mit dem Vertiefungsfach Leichtbau, und zwar sowohl in der Theorie als auch in der Praxis. Die Konstruktions-Praxis erlebte ich schon als Student, als ich bei der Konstruktion der ersten Segelflugzeuge aus Glasfaserkunststoff mitwirken konnte. Während dieses Lernens von der Pike auf hörte ich von meinen Lehrmeistern häufig den Satz "Konstruieren ist keine Wissenschaft, Konstruieren ist eine Kunst!" Diese Behauptung hat vielleicht auch heute noch eine gewisse Gültigkeit, wenn wir auch inzwischen die wissenschaftliche Basis des Konstruierens etwas höher bewerten als damals. Mit der Zeit dürfte sich immer mehr der Ausspruch bewahrheiten, der von Ludwig Prandtl überliefert wird: "Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie!", wobei die Betonung sicher auf dem Wörtchen *gute* liegen muß. Ich hoffe, daß die vorliegende Arbeit sich in diesem Sinne als ein "praktisches" Buch erweisen wird.

Wenn es bereits beim Konstruieren mit konventionellen Werkstoffen berechtigt sein soll, von einer Kunst zu sprechen, dann nähern wir uns mit einer Faserverbund-Struktur schon allmählich einem "Gesamt-Kunstwerk". Jetzt sind auch die Fesseln gesprengt, die dem Konstrukteur durch die in engen Grenzen vorgegebenen Eigenschaften der Standard-Werkstoffe angelegt waren. Nun kann er nach dem großartigen Vorbild der Natur den "Stoff", aus dem das Bauteil entstehen soll, nach seinen Vorstellungen von idealen Kraftflüssen und "intelligenten" Verformungen selbst gestalten. Sogar ein Laie wird nachempfinden können, welche starke Faszination diese neue Freiheit auf den konstruierenden Ingenieur ausübt.

Es sollte uns aber stets bewußt bleiben, daß die Faserverbundtechnik – genau so wie jede andere moderne Technologie – ambivalent ist. So können ihre Ergebnisse in Form wunderschöner Segelflugzeuge erscheinen, mit denen Menschen sich über den Alltag erheben, in Form ultraleichter Prothesen, die Behinderten den Alltag meistern helfen, oder als robuste und aerodynamisch hochwertige Rotorblätter in ressourcenschonenden Windkraftanlagen, aber eben auch in Form von Tarnkappen-Bombern und furchtbaren Raketenwaffen. Kaum jemand, der sich der Faserverbundtechnik verschreibt, wird dieser Problematik und den damit verbundenen Entscheidungen ausweichen können.

Dies Buch ist all jenen Menschen gewidmet, die sich bei ihren Entscheidungen nicht von der Faszination der modernen Technik, sondern allein von ihrem Gewissen leiten lassen.

Vorwort

Hochbeanspruchte Bauteile aus Faserkunststoffverbunden sind nun schon seit Jahrzehnten im Einsatz, und zwar als Sportgeräte, Segelflugzeuge, Boote, Hubschrauber- und Windkraftrotoren, Satellitenstrukturen und Leitwerke von Großraumflugzeugen, um nur die bekanntesten zu nennen. Deshalb dürfte man gar nicht mehr von einer "neuen Technologie" sprechen, wie es immer noch geschieht. Auch existiert bereits eine solche Fülle von Literatur zur Faserverbundtechnologie, daß sie auch für den Experten nicht mehr überschaubar ist. Um so verwunderlicher ist es, daß es im Know-how der Faserverbundtechnik immer noch unterentwickelte Gebiete gibt. Zu diesen gehört die Festigkeitsanalyse der Lamine. Obwohl es sich hierbei zweifellos um einen zentralen Problemkreis handelt, ist dies Gebiet möglicherweise das am weitesten zurückgebliebene. Dies hat viele Gründe:

- Das Festigkeitsverhalten der Faser-Matrix-Lamine, insbesondere wenn es sich um vielschichtige Lamine handelt, ist analytisch außerordentlich schwer zu erfassen, weil sich sukzessive Bruchvorgänge abspielen, bei denen nacheinander sehr unterschiedliche Versagensvorgänge eintreten, die sich häufig auch noch gegenseitig beeinflussen.
- Bei den frühen wissenschaftlichen Arbeiten zum Problem der Bruchkriterien für Faserverbunde hat man sich zu sehr von den so erfolgreichen Fließkriterien für duktile metallische Werkstoffe leiten lassen anstatt von dem ganz anders gearteten Sprödbbruchverhalten, das bei fast allen Hochleistungs-Faserverbundstoffen zu beobachten ist.
- Nachdem die unter mehr mathematischen als werkstoffkundlichen Aspekten entstandenen "anisotrop gemachten" Fließkriterien Eingang in kommerziell vertriebene Rechenprogramme gefunden hatten, waren sie offenbar weitgehend der Kritik entzogen.
- Experimente mit mehreren gleichzeitig wirkenden Spannungen, mit denen man die Gültigkeit von Bruchkriterien überprüfen könnte, sind außerordentlich schwierig. Dies macht es verständlich, weshalb die Unhaltbarkeit mancher Bruchkriterien und Degradationsmodelle über Jahrzehnte unbemerkt blieb.

Bei der Entwicklung festigkeitsmäßig voll ausgenutzter Faserverbund-Bauteile und den dabei unumgänglichen Bruchversuchen an Prototypbauteilen sind häufig Erfahrungen gemacht worden, die sich mit den gängigen Festigkeitstheorien nicht in Einklang bringen ließen. So geht auch dies Buch auf Anstöße aus der Praxis der Bauteilentwicklung in Industrie und Forschungseinrichtungen zurück. Es ist in erster Linie für Praktiker geschrieben. Die anstehenden Fragen sind jedoch zu schwierig, als daß sie in einer theoretisch anspruchslosen Form behandelt werden könnten. Als didaktische Leitlinie galt deshalb: "So praxisnah wie möglich, so theoretisch wie nötig!" Darüberhinaus ist versucht worden, weitestgehend das

Hilfsmittel der Visualisierung einzusetzen, um so – im wahrsten Sinne des Wortes – ”Einsichten” zu vermitteln. Es sollte keine Formelsammlung entstehen, sondern stattdessen vertieftes Verständnis für die schwierigen Zusammenhänge geweckt werden, das die Urteilsfähigkeit gegenüber Theorien verbessert und vor Fehlanwendungen kommerzieller Software bewahrt.

Wegen des heterogenen Aufbaus und des Spröbruchcharakters der meisten Faserverbundwerkstoffe, die technisch/wirtschaftliche Bedeutung besitzen, wären unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten die Mikromechanik und die Bruchmechanik angemessene theoretische Werkzeuge. Für den entwerfenden und dimensionierenden Ingenieur ist aber eine auf einem mehr makromechanischen Niveau angesiedelte Betrachtungsweise zweckmäßig. Als das praktischste Modell erweist sich aus dieser Sicht der Schichtenverbund aus Einzelschichten, die als homogenes, anisotropes Kontinuum behandelt werden und bei denen die beiden grundverschiedenen Brucharten *Faserbruch* und *Zwischenfaserbruch* unterschieden werden.

Mit *Teil I* wird, ausgehend vom Laminataufbau, der das Bruchverhalten wesentlich mitbestimmt, über Hinweise zur Spannungsanalyse und grundlegende Betrachtungen zu Bruchkriterien auch dem noch unerfahrenen Leser ein ”Einstieg” in die nicht ganz einfache Materie ermöglicht. Von zentraler Bedeutung ist *Teil II*, in dem eine schichtenweise Bruchanalyse für ebene Beanspruchung in der Schichtebene dargestellt wird, die sich in der Praxis der Bauteilkonstruktion entwickelt hat, aber auch theoretischen Ansprüchen genügt. Im *Teil III* wird über neue Forschungsergebnisse des Autors berichtet, die insbesondere für räumliche Beanspruchungen zu realistischen Modellen geführt haben, die zusätzliche Informationen über Bruch-Modus und Bruchrichtung liefern. *Teil IV* befaßt sich schließlich mit einigen Spezialproblemen der Forschung und versucht, bei den vielen ungelösten Problemen und offenen Fragen Prioritäten zu setzen sowie ein wenig die Zukunftsaussichten zu ergründen.

Faserverbund-Experten stimmen heute darin überein, daß die anfänglich in die Faserverbund-Bauweisen gesetzten – teilweise sicher übertriebenen – Erwartungen sich nicht erfüllt haben. Ebenso besteht jedoch auch weitgehende Übereinstimmung darin, daß das tatsächliche Potential der Faserverbundtechnik erst zu einem kleinen Teil genutzt wird. Ein wesentlicher Grund dafür, warum festigkeitsmäßig ausgereizte Faserverbund-Bauteile im Wettbewerb mit konventionellen Bauteilen oft nicht zum Zuge kamen, bestand in den viel zu langen Entwicklungszeiten und zu hohen Entwicklungskosten. Mit Hilfe einer realistischen Bruchanalyse lassen sich beide verringern. Sie erlaubt es zum einen, erst mit ausgereifteren Prototypen in die Festigkeitserprobung zu gehen, und zum anderen, unbefriedigende Prüfergebnisse richtig zu interpretieren, um dann zielsicher Verbesserungen vorzunehmen. Es ist das vorrangige Ziel dieses Buches, einen Beitrag zur Entwicklung dieser Fähigkeiten zu leisten.

Das Zustandekommen des Buches ist ganz wesentlich einigen Frauen zu verdanken:

Frau Univ.-Prof. *Dr. Rita Jeltsch-Fricke*, die der Arbeitsgruppe Ingenieurmathematik der Universität Gesamthochschule Kassel angehört, hat den ersten Anstoß zu dieser Veröffentlichung gegeben und mir mit wissenschaftlicher Diskussion und wertvollen Anregungen, insbesondere zur Visualisierung, sehr geholfen. Frau *Gerhild Heldmann-Görge* hat unermüdlich immer neue Textversionen geschrieben, bis endlich eine auch aus didaktischer Sicht befriedigende Form gefunden war. Die vielen Zeichnungen wurden in liebevoller Handarbeit von Frau *Gerlinde Fischer* angefertigt. Und – last, not least – hat meine Frau, *Hannelore Puck*, mich mit Verständnis und Einfühlungsvermögen bei der Arbeit am Buch unterstützt und mir – im sogenannten Ruhestand – für mein technisch/wissenschaftliches Steckenpferd viel Zeit zugestanden, die eigentlich bereits anders versprochen war.

Mein Dank gilt auch Frau *Dr. Christine Strohm* vom *Carl Hanser Verlag*, die mir mit Zuspruch, sachkundigem Rat und viel Verständnis für spezielle Wünsche sehr geholfen hat.

Die vielen bei der elektronischen Datenverarbeitung anfallenden Probleme und das schwierige Layout wurden von Herrn Dipl.-Ing. *Andreas Rauchhaus* gemeistert.

Etliche Fachkollegen, denen ich das Manuskript mit der Bitte um kritische Durchsicht überlassen hatte, haben mir wichtige fachliche Hinweise und Anregungen für eine verbesserte Didaktik gegeben, für die ich sehr dankbar bin. Es waren dies (von A bis Z):

Dipl.-Ing. *U. Ahrend*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. (habil) *R.G. Cuntze*, MAN-Technologie, München/Karlsfeld;
Dipl.-Ing. *S. Fabisch*, Univ. Gh Kassel;
Dipl.-Ing. *J. Garbe*, Fraunhofer-Inst. (LBF), Darmstadt;
Dr.-Ing. *B. Geier*, Inst.f. Strukturmech., DLR, Braunschweig;
Dr.-Ing. *K. Gliesche*, Inst.f. Polymerforsch., Dresden;
Dr.-Ing. *D. Huybrechts*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. *R. Jakobi*, BASF, Ludwigshafen;
Dipl.-Ing. *J. Kopp*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. *U. Knaust*, AUDI, Ingolstadt;
Dr.-Ing. *G. Kress*, Inst.f.Konstr.u.Bauweisen, ETH Zürich;
Dr.-Ing. *L. Kroll*, Inst.f.Leichtb.u.Kunstst., TU Dresden;
Univ.-Prof.Dr.mont. *R.W. Lang*, Montanuniv. Leoben, Österreich;
Dipl.-Ing. *G. Lutz*, Geislinger & Co, Salzburg, Österreich;
Prof. dipl. Ing. ETH *U. Meier*, Eigen.Mat.prüf.-u.Forschanst. (EMPA), Dübendorf, Schweiz;
Dipl.-Ing. *E. Poutet*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Univ.-Prof. Dr.-Ing. *H. Schürmann*, Fachgeb.Leichtbaukonstr.u.Bauweisen, T.H. Darmstadt;
Dr.-Ing. *K. Stellbrink*, Inst.f.Bauweisen-und Konstr.forsch., DLR, Stuttgart;
Dipl.-Ing. *O. Wellems*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Ing. *P. Voirol*, STESALIT, Zuwill (Basel), Schweiz;
Dipl.-Ing. *D. Zeise*, Kontec, Korntal-Münchingen.

Immenhausen, im Dezember 1995

A. Puck

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Einführende Betrachtungen und Grundlagen | 1 |
| 1 | Einführung | 3 |
| 1.1 | Der Problembereich | 3 |
| 1.2 | Gegenwärtige Situation | 6 |
| 1.3 | Zielsetzung | 10 |
| 2 | Bruchgeschehen in Laminaten | 11 |
| 2.1 | Zum Aufbau von Laminaten | 11 |
| 2.2 | Zwischenfaserbrüche | 14 |
| 2.3 | Delaminationen | 18 |
| 2.4 | Faserbrüche | 21 |
| 2.5 | Laminat-Versagen | 23 |
| 3 | Anmerkungen zur Spannungsanalyse | 31 |
| 3.1 | Vorbemerkungen | 31 |
| 3.2 | Hinweise zur Netztheorie | 31 |
| 3.3 | Probleme bei der klassischen Laminattheorie | 35 |
| 3.4 | Anmerkungen zu interlaminaren Spannungen | 40 |
| 3.5 | Hinweise auf analytische Lösungen | 44 |
| 4 | Allgemeine Betrachtungen über Bruchkriterien | 45 |
| 4.1 | Begriffe und Definitionen | 45 |
| 4.2 | Visualisierung und mathematische Aspekte | 49 |
| 4.3 | Kurzer geschichtlicher Rückblick | 53 |
| II | Entwicklungsstand bei den 2D-Bruchanalyse-Modellen | 57 |
| 5 | Bruchbedingungen | 59 |
| 5.1 | Bruchbedingungen für Zwischenfaserbruch | 59 |
| 5.1.1 | Wege zu erhöhter Aussagekraft | 59 |
| 5.1.2 | Empfehlenswerte Zwischenfaserbruch-Bedingungen | 60 |
| 5.1.3 | Einfluß der faserparallelen Spannung | 66 |
| 5.2 | Bruchbedingungen für Faserbruch | 71 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 5.3 | Bruchkörper | 75 |
| 5.4 | Berücksichtigung von Eigenspannungen | 78 |
| 6 | Degradation nach der Ribbildung | 81 |
| 6.1 | ”Verschmieren” der Risse | 81 |
| 6.2 | Abminderungsfunktion für Elastizitätsgrößen | 83 |
| 6.2.1 | Bruch-Modus A | 83 |
| 6.2.2 | Bruch-Modi B und C | 89 |
| 7 | Durchführung und Auswertung der Bruchanalyse | 91 |
| 7.1 | Ribbildung und Verformungsverhalten | 91 |
| 7.2 | Delaminationsgefahr | 91 |
| 7.3 | Laminat-Versagen | 95 |
| 7.4 | Anwendung auf gewebeartige Strukturen | 95 |
| 7.5 | ”Schnelle Programme” für den Laminat-Entwurf | 99 |
| III | Neue Wege zu realistischen 3D-Bruchbedingungen | 103 |
| 8 | Grundlagen einer neuen Zwischenfaserbruch-Analyse | 105 |
| 8.1 | Wesen und Vorgeschichte der neuen Bruchanalyse | 105 |
| 8.1.1 | Sprödbbruch und Mohrsche Festigkeitshypothese | 105 |
| 8.1.2 | Hashin’s Idee zum neuen Verfahren | 107 |
| 8.2 | Physikalische Grundlagen | 110 |
| 8.2.1 | Bruchmechanischer Hintergrund | 110 |
| 8.2.2 | Erweiterte Bruchhypothese | 112 |
| 8.3 | Die neuen ”Festigkeits”-Parameter | 116 |
| 8.3.1 | Grundsätzliche Überlegungen | 116 |
| 8.3.2 | Einführung des Bruchwiderstands der Wirkebene | 117 |
| 8.3.3 | Übereinstimmungen mit Festigkeiten | 119 |
| 8.3.4 | Empfehlungen zur Fehlervermeidung | 122 |
| 8.3.5 | Die ”Neigungs”-Parameter | 122 |
| 8.3.6 | Anhaltswerte für Werkstoffparameter | 123 |
| 8.4 | Mathematische Grundlagen | 123 |
| 8.4.1 | Mathematisch ausgerichtete Arbeiten | 123 |
| 8.4.2 | Die Bruchfunktion | 124 |
| 8.4.3 | Übergangsmöglichkeiten zwischen den Spannungsräumen | 125 |
| 8.4.4 | Bruchwinkel-Ermittlung | 126 |
| 8.5 | Mechanische Zusammenhänge | 129 |
| 8.5.1 | Spannungen auf ”schrägen” Schnitten | 129 |
| 8.5.2 | Auswirkungen des Vorzeichens von Spannungen | 131 |
| 8.5.3 | Haupt-Normalspannungen und ”resultierende” Schubspannungen | 132 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9 | Bruchbedingungen der neuen Art | 137 |
| 9.1 | Bruchbedingung für eine druckbeanspruchte Bruchebene | 137 |
| 9.1.1 | Vorbemerkungen | 137 |
| 9.1.2 | Einfluß der Druckspannung auf den Schubbruch | 138 |
| 9.1.3 | Interaktionsansätze für die Schubspannungen | 142 |
| 9.2 | Bruchbedingung für eine zugbeanspruchte Bruchebene | 148 |
| 9.3 | Anwendung als Delaminations-Bedingungen | 150 |
| 9.4 | Sekundäre Einflüsse | 153 |
| 9.4.1 | Einfluß der faserparallelen Spannung | 153 |
| 9.4.2 | Einfluß von Eigenspannungen | 156 |
| 9.5 | Anwendungsempfehlungen | 158 |
| 9.5.1 | Allgemeine Hinweise und Empfehlungen | 158 |
| 9.5.2 | Vereinfachung bei 2D-Beanspruchung | 161 |
| 9.6 | Ergebnisdarstellung und -diskussion | 165 |
| 9.6.1 | Beispiele für Zfb-Bruchkörper | 165 |
| 9.6.2 | Unterscheiden verschiedener Bruch-Modi | 170 |
| IV | Spezialprobleme, offene Fragen, Zukunftsaussichten | 171 |
| 10 | Spezialprobleme der Master-Bruchfläche | 173 |
| 10.1 | Vorbemerkungen | 173 |
| 10.2 | Der Vektorenfächer und seine Randkurve | 173 |
| 10.3 | Sensitivität des Bruchwinkels | 178 |
| 10.4 | "Blinde Flecken" und "tote Räume" | 178 |
| 10.5 | Vorüberlegungen zu Fragen der Probabilistik | 181 |
| 10.6 | Versuch einer Beurteilung | 184 |
| 11 | Offene Fragen | 187 |
| 11.1 | Anwendbarkeit für verschiedene Beanspruchungsarten | 187 |
| 11.2 | Einige ungeklärte Fragen | 191 |
| 11.3 | Versuch einer Prioritätensetzung | 193 |
| 12 | Zukunftsaussichten | 195 |
| 13 | Anhang | 199 |
| 13.1 | Literaturverzeichnis | 199 |
| 13.2 | Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen | 206 |
| 13.3 | Fachwortverzeichnis | 209 |
| 13.4 | Stichwortverzeichnis | 211 |

Teil I

Einführende Betrachtungen und Grundlagen

1 Einführung

1.1 Der Problemkreis

Die theoretische Behandlung der "Festigkeit" von Faser-Matrix-Laminaten ist ein recht schwieriges Problem. Es wird in der Literatur unter sehr verschiedenen Blickwinkeln und mit sehr unterschiedlichen Interessenschwerpunkten behandelt. Das vorliegende Buch ist in erster Linie auf die Tätigkeit des entwerfenden und berechnenden Ingenieurs ausgerichtet, der bestrebt ist, bezüglich der "Festigkeit" möglichst gut ausgelegte Faserverbund-Bauteile zu entwickeln und zu dimensionieren. Das Schädigungs- und Bruchverhalten eines Bauteils sollte im Idealfall rein rechnerisch ohne aufwendige Belastungs- und Bruchversuche an Prototyp-Bauteilen vorhersagbar sein. In der Faserverbundtechnik ist man von diesem Ziel noch sehr weit entfernt. Woran dies liegt, wird bei der Lektüre deutlich werden.

Konstrukteure können bei ihren Berechnungen nicht im Gebiet der Mikromechanik beginnen, mit der die Schädigungs- und Bruchvorgänge im μm -Bereich der Elementarfaserdurchmesser betrachtet und mit Hilfe entsprechender mikromechanischer Modelle beschrieben werden. Allerdings ist es außerordentlich hilfreich, wenn auch der Bauteil-Konstrukteur mit mikromechanischen Vorstellungen und Erkenntnissen vertraut ist. Dies ermöglicht ihm, die mikromechanischen Hintergründe der "makromechanisch" sichtbar werdenden Bruchvorgänge zu erkennen und dadurch die Chancen und Grenzen der Faserverbundwerkstoffe realistischer einzuschätzen.

Für die eigentliche Konstruktionsarbeit bedarf es einer etwas "vergrößerten" Betrachtungsweise, bei der nicht mehr in μm -Abmessungen der Elementarfaser, sondern in mm -Dimensionen der Einzelschichtdicken des Laminats gedacht und gerechnet wird. Typisch für die ingenieurmäßige Betrachtungsweise ist das in **Bild 1.1** dargestellte Grundelement eines unidirektional faserverstärkten Faser-Matrix-Verbunds (UD-Schicht), bei dem Fasern und Matrix "homogenisiert", d.h. als feinstverteilt, behandelt werden. Dementsprechend werden nicht die tatsächlich auftretenden, teilweise sehr unterschiedlich hohen Spannungen im Faser- und Matrixmaterial betrachtet, sondern rechnerisch über den aus Faser- und Matrix-Querschnitten bestehenden Gesamtquerschnitt gemittelte Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$.

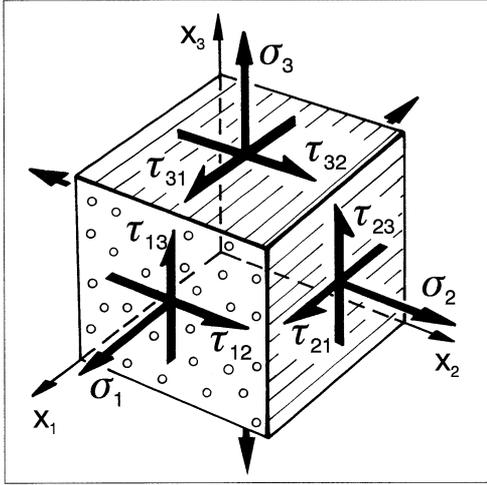


Bild 1.1: Spannungen am UD-Verbund. Die Normalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die Schubspannungen $\tau_{23} = \tau_{32}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{12} = \tau_{21}$ sind auf das (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem der UD-Schicht bezogen. Die (x_1, x_2) -Ebene ist die Schichtebene, x_3 ist die Dickenrichtung. Spannungen mit dem im Bild gezeigten Richtungssinn werden als positive, mit umgekehrtem Richtungssinn als negative Werte angeben.

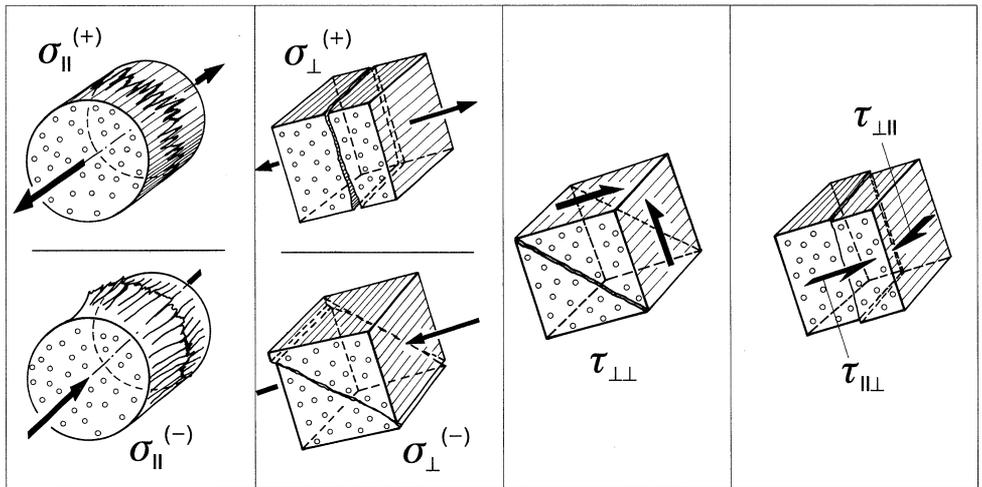


Bild 1.2: Beanspruchungen des UD-Verbunds. σ_{\parallel} = Längsbeanspruchung, σ_{\perp} = Querbeanspruchung; dabei sind Zugbeanspruchung $(+)$ und Druckbeanspruchung $(-)$ zu unterscheiden. $\tau_{\perp\perp}$ = Quer/Querschubbeanspruchung. $\tau_{\parallel\perp}$ = Quer/Längs-Schubbeanspruchung, $\tau_{\perp\parallel}$ = Längs/Quer-Schubbeanspruchung. Die zugehörigen Festigkeiten $R_{\parallel}^{(+)}$, $R_{\parallel}^{(-)}$, $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp}^{(-)}$, $R_{\perp\perp}$, $R_{\perp\parallel}$ werden sämtlich als positive Werte angegeben, auch die Druckfestigkeiten.

Weil die Bauteile häufig Flächentragwerke sind, in denen ebene Spannungszustände vorherrschen, überwiegen die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ mit Kraftwirkungen in der Schichtebene gegenüber den Spannungen $\sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}$ mit Kraftwirkung in Dickenrichtung. **Bild 1.2** stellt die typischen Beanspruchungen dar, die an einem UD-Verbund auftreten können.

Aus mikromechanischer Sicht existieren in jedem Faserverbundbauteil bereits unmittelbar nach seiner Herstellung Myriaden von kleinen "Brüchen", die von Verspannungen zwischen Fasern und Matrix infolge des Reaktionsschwunds des Matrixmaterials und von Abkühlspannungen verursacht wurden. Spätestens bei den ersten Belastungen des Bauteils treten weitere Mikro-Schädigungen hinzu, meist in Form kleiner – mit dem Auge nicht feststellbarer – Risse in der Matrix und stellenweiser Ablösungen der Matrix von der Faser. Da solche Mikroschäden optisch kaum wahrnehmbar sind, benutzt man in der Werkstoffprüfung häufig die Schallemissions-Analyse, um den Beginn und den Ablauf solcher Mikroschädigungen zu untersuchen. Auch das Erscheinen einer ausgeprägten Schädigungs-Hysterese bei mehrmaliger Belastung gibt Aufschluß über das Auftreten und das Ausmaß solcher Mikroschädigungen. Bild 1.3 zeigt dies am Beispiel einer reinen $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbeanspruchung.

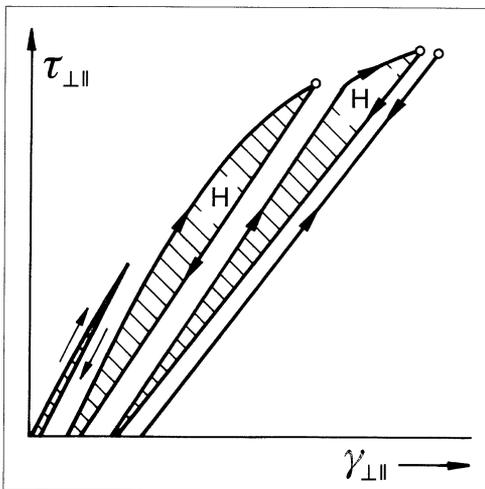


Bild 1.3: Schubspannungs, Schiebungs-Diagramm bei Quer/Längs-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\parallel}$ für Be- und Entlastungsvorgänge mit stufenweise gesteigerter Höchstlast. H = Hysterese infolge Mikroschädigungen

Mikroschädigungen dieser Art können sich bei einer Belastungssteigerung oder bei wiederholter Belastung zu größeren Rissen vereinigen, die, wenn sie eine gewisse Größe erreicht haben, plötzlich eine UD-Schicht – meistens in Dickenrichtung verlaufend – vollständig durchtrennen. Beim Eintritt dieser "makromechanischen", d.h. mit Mittelspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ usw. beschreibbaren, Bruchvorgänge beginnt die "ingenieurmäßige" Betrachtung.

Solche örtlich begrenzten, aber die Einzelschicht auf ihrer ganzen Dicke durchtrennenden Teilbrüche werden "Zwischenfaserbrüche" genannt; bei Laminaten spricht man auch von "Zwischenfaserrissen". Sie spielen in diesem Buch eine wichtige Rolle. Weil sie bei einem gut konzipierten Bauteil normalerweise nicht unmittelbar zur Erschöpfung der Tragfähigkeit führen, sind sie in der Vergangenheit zu wenig beachtet worden. In der Praxis hat sich aber gezeigt, daß es verschiedene Arten von Zwischenfaserbrüchen gibt, von denen einige

relativ harmlos, andere jedoch sehr gefährlich sind. In jedem Fall bewirken diese "Makroschädigungen" in Form von Zwischenfaserbrüchen örtliche Spannungskonzentrationen, die eine Schichtentrennung, eine sogenannte Delamination, und eine verstärkte Anfälligkeit gegen Faserbrüche – insbesondere bei schwingender Beanspruchung – zur Folge haben können.

Wenn bei der ingenieurmäßigen Betrachtungsweise von "Faserbruch" gesprochen wird, ist damit nicht der Bruch einer Elementarfaser oder einiger weniger Elementarfasern gemeint, sondern ein gehäufteter Elementarfaserbruch, bei dem Zigtausende von Elementarfasern fast gleichzeitig brechen.

Da die meistens parallel orientierten Fasern der Einzelschichten im Laminat in verschiedenen Richtungen angeordnet sind, erfahren die einzelnen Schichten in der Regel sehr unterschiedliche Beanspruchungen, so daß sie ihre Zwischenfaserbruch- oder Faserbruchgrenzen nicht gleichzeitig erreichen. Deshalb stellt sich bei einer allmählichen Laststeigerung oder bei schwingender Langzeitbeanspruchung ein sukzessives Bruchgeschehen ein. Dies vor allem ist es, was die Bruchanalyse von Laminaten so schwierig macht, und nicht – wie vielfach angenommen wird – die Anisotropie. Um ein solches fortschreitendes Bruchgeschehen rechnerisch einigermaßen realistisch verfolgen zu können, benötigt man

1. eine schichtenweise Spannungs- und Verzerrungsanalyse,
2. Bruchkriterien für die Einzelschichten der Lamine,
3. Degradationsmodelle zum Erfassen der Auswirkung von Teilbrüchen (meist Zwischenfaserrissen), die noch nicht zum Totalbruch des Laminats führen,
4. ein Prozedere (im allgemeinen ein Rechenprogramm), das die genannten Teilbereiche in eine sinnvolle Abfolge bringt, damit das sukzessive Bruchgeschehen wirklichkeitsnah simuliert wird.

Hiermit ist in groben Zügen der Problembereich umrissen, der im Buch behandelt wird. Die "Kunst" besteht darin, für die Alltagspraxis des Ingenieurs Rechenmodelle zu finden, die einfach zu handhaben sind und geringen Rechenaufwand verursachen und dennoch die physikalische Realität in guter Näherung wiedergeben.

1.2 Gegenwärtige Situation

Der augenblickliche Zustand wird treffend durch die folgende Bemerkung zu Faserverbund-Bruchkriterien charakterisiert, die sich in einem Entwurf zum neuen *Structural Materials Handbook* der ESA/ESTEC findet: "Die meisten Festigkeitstheorien können sich nur auf ganz wenige Versuchsergebnisse stützen, werden aber offensichtlich trotzdem mit diesen gerechtfertigt. So neigen die Konstrukteure dazu, exakte Spannungsanalysen durchzuführen, bei

denen sie sorgfältig ermittelte Elastizitätsgrößen benutzen; sie sind dann aber gezwungen, Festigkeiten für einachsige Beanspruchung in Verbindung mit Bruchtheorien anzuwenden, über die wenig bekannt ist.”

Nachdem man in der Frühzeit der Faserverbundtechnik versucht hat, Bruchkriterien für ganze Laminat aufzustellen, stimmen Forscher und Konstrukteure heute weitgehend darin überein, daß – wegen des sukzessiven Bruchgeschehens – nur eine schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse in Betracht kommt. Etliche, für eine wirklichkeitsnahe Bruchanalyse von Laminaten ganz wesentliche Gesichtspunkte und Erkenntnisse wurden schon in zwei mehr als 25 Jahre zurückliegenden Veröffentlichungen [1,2] dargestellt. Die wichtigsten waren:

- Es müssen gleichzeitig zwei weitgehend voneinander unabhängige Bruchkriterien benutzt werden, und zwar eines für Faserbruch (Fb) und eines für Zwischenfaserbruch (Zfb), denn die Auswirkungen der beiden Brucharten sind grundverschieden und ebenso die konstruktiven Gegenmaßnahmen gegen die eine oder andere Bruchart.
- Bei der Beurteilung der Gefährlichkeit von Zwischenfaserrissen muß zwischen der relativ harmlosen Rißbildung infolge Quer-Zugspannungen ($\sigma_2 > 0$) und den mit einer ”Sprengwirkung” auf das Laminat verbundenen keilförmigen Brüchen bei überwiegender Quer-Druckbeanspruchung ($\sigma_2 < 0$) unterschieden werden.
- Das Festigkeitsverhalten im Druckbereich ($\sigma_2 < 0$) wird nicht von der Zugfestigkeit beeinflusst und das Festigkeitsverhalten im Zugbereich ($\sigma_2 > 0$) nicht von der Druckfestigkeit. Deshalb sollte eine (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve, die dieses Festigkeitsverhalten beschreibt, nicht mit einer einzigen Gleichung formuliert werden, in der sowohl die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ als auch die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ vorkommt.
- Die durch Zfb verursachte Rißbildung ”erweicht” eine Schicht sukzessive und nicht schlagartig. Deshalb sollte die Degradation von Steifigkeiten mittels ”Verschmieren” der Risse nach dem Überschreiten von Rißbildungsgrenzen allmählich und nicht sprungartig erfolgen, und sie muß vor allem selektiv durchgeführt werden, d.h. bei $\sigma_2 < 0$ anders als bei $\sigma_2 > 0$.

Obwohl diese grundlegenden Erkenntnisse durch Experimente vielfach bestätigt und in den letzten beiden Jahrzehnten auch von anderen Autoren, z.B. von *Hashin* [3] und *Hart-Smith* [4] in ähnlicher Weise dargelegt worden sind, werden sie bei den heute gebräuchlichen Modellen und Rechenprogrammen zur Laminat-Bruchanalyse keineswegs durchgängig beachtet. So werden beispielsweise immer noch Festigkeiten des UD-Verbunds, die einem Zwischenfaserbruch zugeordnet sind, mit Faserbruch-Festigkeits in einem einzigen ”globalen” oder ”pauschalen” Bruchkriterium vereinigt [5], so daß keine klare Entscheidung darüber gefällt werden kann, ob die erhaltene Information ”Bruch” einem Zwischenfaserbruch oder einem

Faserbruch zuzuordnen ist. Durch eine unrealistische Degradation von Steifigkeiten aller im Laminat vereinigten Einzelschichten wird dann nach dem "Bruch" der ersten Schicht (First Ply Failure, FPF) versucht, das ursprünglich nicht differenzierende Bruchkriterium in eine Art Faserbruch-Kriterium umzuwandeln. Das tatsächliche sukzessive Bruchgeschehen kann so aber nicht realistisch rechnerisch simuliert werden, und es verbleiben große Unsicherheiten bei der Interpretation der Ergebnisse, wie in [6] dargelegt wurde.

In den letzten drei Jahrzehnten sind laufend neue Bruchkriterien für Faser-Matrix-Verbunde publiziert worden. In einer 1986 erschienenen Übersicht gab *Nahas* [7] bereits über 30 Kriterien an. Heutige Lehrbücher und Handbücher, die sich mit dem Dimensionieren von Bauteilen aus Faser-Matrix-Verbunden befassen, führen eine verwirrend große Anzahl von Bruchkriterien auf, die z.T. zu unterschiedlichsten Festigkeitsvorhersagen führen. In der neuesten Ausgabe eines Handbuches [8] werden allein etwa 20 Gruppen von Bruchkriterien mit jeweils bis zu vier Varianten aufgezählt. Den Anwendern kann dazu aber keinerlei Empfehlung für eine vernünftige Wahl gegeben werden, weil keines der Kriterien hinreichend experimentell abgesichert ist und für eine Bewertung der Bruchkriterien eine physikalische Grundlage fehlt. Diese frustrierende und die Nutzung des Potentials der Faserverbundwerkstoffe hemmende Situation muß dringend überwunden werden.

Vergleichsweise günstig stellt sich die Situation dagegen bei der schichtenweisen Spannungs- und Verzerrungsanalyse von Laminaten dar. Es darf wohl angenommen werden, daß heutzutage jeder professionell mit der Entwicklung von Faserverbundbauteilen befaßte Konstrukteur über Rechenprogramme verfügt, die auf der klassischen Laminat-Theorie (Classical Laminate Theory, CLT) basieren. Die Entwicklung der Finite Elemente Methode (FEM) bedeutete auch für die Spannungsanalyse der Laminaten einen enormen Fortschritt. Für die zuverlässige und rationelle Berechnung räumlicher (3D)-Spannungszustände in relativ dicken Laminaten bedarf es allerdings noch der Entwicklung für die Ingenieurspraxis geeigneter Elemente. Hier kommt es vor allem darauf an, zu verhindern, daß der Rechenaufwand bei dicken und vielschichtigen Laminaten "explodiert". Es zeichnen sich aber bereits Näherungsverfahren ab, die den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen halten [9,10].

Ein Problem, das bei den Spannungsanalysen jeglicher Art noch Schwierigkeiten bereitet, ist die Berücksichtigung nicht-linearer Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, wie sie insbesondere in den (τ_{21}, γ_{21}) -Diagrammen und $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagrammen, wenn σ_2 eine Druckspannung ist, zum Ausdruck kommen. Die meisten kommerziell vertriebenen Rechenprogramme sind außerstande, nicht-lineare orthotrope Stoffgesetze zu berücksichtigen, die das Verformungsverhalten von Faser-Matrix-Verbunden richtig beschreiben. Dadurch können beachtliche Fehler entstehen, s. Abschnitt 3.3 .

Besonders unbefriedigend ist die Situation bei den Degradationsmodellen. In der erwähnten Übersicht [7] werden im Vergleich zu den zahlreichen Bruchkriterien nur wenige Degra-

dationsmodelle aufgeführt, und von denen erscheinen manche auch noch recht unrealistisch. Gerade bei den Degradationsmodellen besteht deshalb Forschungsbedarf.

In kommerziellen Rechenprogrammen ist eine dem sukzessiven Bruchgeschehen angemessene Degradation von Steifigkeiten und Festigkeiten überhaupt nicht vorgesehen. Deshalb erhält man häufig nur bis zum FPF einigermaßen verlässliche Ergebnisse. FPF der harmlosen Art wird aber häufig schon bei etwa 10% der zum Totalbruch führenden Last erreicht, so daß in hochbeanspruchten Leichtbauteilen auch bei normalen Betriebszuständen die FPF-Last weit überschritten werden muß. Deshalb ist es wichtig, mit Hilfe einer über FPF hinausgehenden Bruchanalyse zu erfahren, bei welchen Lasten und in welchen Schichten weitere Teilbrüche zu erwarten sind, um durch einen geschickten Laminataufbau deren Auswirkungen mildern zu können. Die "bunten Bilder", die manche Rechenprogramme erzeugen, um so die bei einem gegebenen Belastungszustand auftretende "Material-Anstrengung" sichtbar zu machen, basieren häufig auf unrealistischen Bruchkriterien und geben dem Konstrukteur meistens keine Handhabe, das entworfene Laminat gezielt schrittweise zu verbessern.

Alles in allem stellt sich die heutige Situation bei der Festigkeits- oder Bruchanalyse von Laminaten als höchst unbefriedigend dar. In der Forschung auf diesem Gebiet hat es häufig Phasen der Stagnation gegeben. In den letzten Jahren sind aber wieder neue Aktivitäten, insbesondere bei der Entwicklung physikalisch begründeter Zwischenfaserbruch-Kriterien zu verzeichnen [11 bis 16]. Hierüber wird ausführlich im Teil III des Buches berichtet.

Vertiefte Einblicke und neue Erkenntnisse zum Problemkreis der Schädigungs- und Bruchvorgänge in Laminaten sind aus dem Forschungsgebiet "Schädigungs-Mechanik" (Damage Mechanics) zu erwarten, das sich in den letzten Jahren rasant entwickelt [17]. Auf diesem Gebiet wird versucht, die Schädigungs- und Bruchvorgänge auf einer soliden thermomechanischen Grundlage sehr "korrekt" zu beschreiben. Dabei werden verständlicherweise wegen des vielfach beobachteten Spröbruch-Verhaltens – besonders bei Zwischenfaserbrüchen – weitgehend bruchmechanische Ansätze benutzt. Es ist nicht verwunderlich, daß infolge der Kompliziertheit der Zusammenhänge auch die theoretischen Formulierungen nicht so einfach und übersichtlich sein können, wie man sie sich für die Konstruktionspraxis wünscht. Die Arbeiten auf diesem Gebiet sind noch stark im Fluß, und so ist noch nicht absehbar, ob man über die Damage Mechanics schlußendlich auch zu Bruchkriterien und Degradationsmodellen gelangen kann, die für die Konstruktionspraxis geeignet sind. Vorerst scheint dies aus der Sicht des Autors noch nicht der Fall zu sein. Vermutlich bedarf es für die Konstruktionspraxis noch auf längere Sicht einer mehr phänomenologisch ausgerichteten Betrachtungsweise und Modellierung als der in der Schädigungsmechanik üblichen. Die Modelle sollten jedoch – so weit wie irgend möglich – eine physikalische Basis haben. Hierfür wird die Schädigungsmechanik sicher fortan wichtige Einsichten und Hilfen liefern.

1.3 Zielsetzung

Die zum umrissenen Problemkreis in den letzten Jahrzehnten erschienenen Publikationen sind auch für den Experten nicht mehr überschaubar und in ihren Aussagen oft recht widersprüchlich. Es dürfte deshalb kaum durchführbar – aber auch wenig sinnvoll – sein, einen breit angelegten historischen Abriss der wissenschaftlichen Entwicklung dieses Gebiets zu geben. Stattdessen erschien es zweckmäßig, auf der Basis der im Teil I behandelten Grundlagen im Teil II des Buches eine Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten vorzustellen, die sich in der Praxis der Bauteilentwicklung im Verlaufe vieler Jahre herausgebildet und bewährt hat. Es werden Probleme aus allen vier in Betracht kommenden Bereichen (Spannungsanalyse, Bruchkriterien, Degradationsmodelle und deren Verkettung durch ein Rechenprogramm) behandelt. Dadurch, daß stets die Verbindung zwischen dem Rechenmodell und der im Experiment zu beobachtenden Realität hergestellt wird, soll vor allem die Urteilsfähigkeit bezüglich der Brauchbarkeit von Rechenmodellen gestärkt werden.

Bei der Lektüre von Teil I und II des Buches wird deutlich werden, daß es in der Festigkeitsanalyse von Laminaten noch manche Schwachstelle und auch erhebliche Wissenslücken gibt. In der Forschung zeichnen sich aber z.Zt. neue Lösungen ab, auf die sich der "Anwender" möglichst frühzeitig einstellen sollte. Deshalb wird im Teil III ein Einblick in die Entwicklung einer neuartigen Zfb-Analyse gegeben, die physikalisch plausibler ist als die heutige Vorgehensweise und außerdem noch interessante Zusatzinformationen über die Bruchrichtung und den Bruch-Modus liefert. Für den ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand sind einige dieser neuartigen Ansätze schon so weit ausgereift, daß sie in Teil II aufgenommen werden konnten.

Einschränkend muß darauf hingewiesen werden, daß die dargestellten Modelle sich bei Arbeiten mit Faser-Kunststoff-Verbunden, insbesondere an GFK-Bauteilen, entwickelt haben. Sie sind deshalb sicher nicht direkt auf beliebige andere Faser-Matrix-Kombinationen übertragbar. Dennoch dürfte manches generelle Gültigkeit besitzen, sofern die Fasern (in ihrer Längsrichtung) erheblich höhere Elastizitätsmoduln und Festigkeiten aufweisen als der Matrix-Werkstoff und die Bruchdehnung der Matrix größer ist als die der Fasern.

Neben der Stärkung der Urteils- und Kritikfähigkeit hat die vorliegende Arbeit das Ziel, für die praktische Anwendung bewährte Modelle und Rechenverfahren zur Festigkeitsanalyse allgemein bekanntzumachen, die dazu beitragen können, die Festigkeitsanalyse zuverlässiger und die Entwurfsarbeit zielgerichteter zu gestalten und somit die Entwicklungszeiten und -kosten bei Faserverbundbauteilen zu verringern.

2 Bruchgeschehen in Laminaten

2.1 Zum Aufbau von Laminaten

Das Bruchgeschehen in Faser-Matrix-Laminaten wird in hohem Maße vom stofflichen und geometrischen Aufbau der Einzelschichten und des Laminats mitbestimmt. Im Zusammenhang mit Fragen der Bruchanalyse interessieren natürlich in erster Linie solche Laminaten, mit denen sich relativ hohe Festigkeiten erzielen lassen. Um hohe Schädigungsgrenzen und Festigkeiten zu erreichen, muß man darauf achten, daß die Fasern oder Faserstränge möglichst gestreckt – im Idealfall auf geodätischen Linien des Bauteils – im Laminat plaziert werden. Nicht vorteilhaft sind unter diesem Aspekt Gewebe, bei denen der Webprozeß eine gewisse Welligkeit der Fäden bewirkt. Ähnliches gilt für Wickellaminaten, wenn bei großen Wickelkörpern mit relativ schmalen Wickelbändern gearbeitet werden muß, die sich überkreuzen und dabei – jedenfalls stellenweise – zu einer ”verflochtenen” Faserstruktur führen.

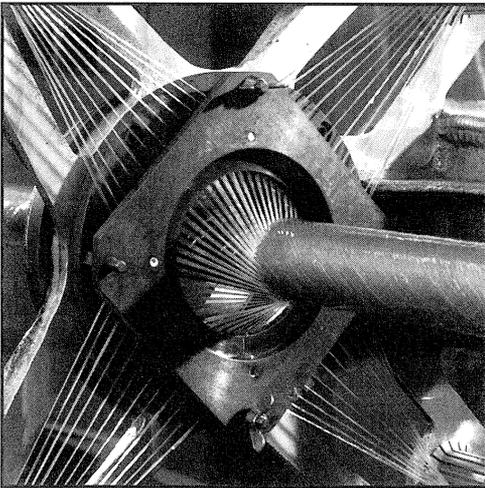


Bild 2.1: Ringfadenaug mit 48 Glasfaser-Rovings für das Wickeln von Pkw-Antriebswellen [27]

Bei kleineren Wickelkörpern wird eine Welligkeit der abgelegten Wickelbänder dadurch vermieden, daß mit Hilfe eines sogenannten Ring-Fadenauges, **Bild 2.1**, so viele Faserstränge

gleichzeitig auf dem Wickelkörper abgelegt werden, daß sich bei jeder Hin- oder Herbewegung des Ring-Fadenauges eine lückenlose Bedeckung des Wickelkerns mit Fasersträngen ergibt, die als eine Wickellage bezeichnet wird. Weil es das Schädigungsverhalten günstig beeinflusst, wenn ein Laminat aus vielen dünnen Schichten mit unterschiedlicher Faserrichtung aufgebaut ist, sorgt man möglichst dafür, daß jede Wickellage eine andere Faserorientierung erhält als die vorangegangene. So gelangt man zu einem feinschichtigen Laminat, bei dem jede Wickellage eine UD-Schicht darstellt. Diese ist in der Regel zwischen 0,1 mm und höchstens 1 mm dick. Die Dicke von Wickellaminaten mißt im allgemeinen zwischen 1 mm und 10 mm, in Ausnahmefällen bis etwa 50 mm. Die Anzahl der in einem Wickellaminat vereinigten UD-Schichten beträgt mindestens 2, in der Regel aber etwa 10 bis 20, in seltenen Ausnahmefällen bis zu 100.

Die meisten im Wickelverfahren hergestellten Bauteile haben die Form eines kreiszylindrischen Rohres. Das Verhältnis von Innen- zu Außenradius kann aus technologischen Gründen einen Grenzwert nicht wesentlich unterschreiten, der etwa bei $r_i/r_a = 0,75$ liegt. Das bedeutet, daß das Verhältnis von Wanddicke zum mittleren Radius nur etwa $t/r_m \leq 1 : 3,5$ sein kann. **Bild 2.2** zeigt die Querschnitte von zwei mit diesem Grenz-Verhältnis ausgeführten GFK-Drehrohrfedern, die wegen ihrer verschiedenen Beanspruchungsarten (schwellend bzw. wechselnd) mit extrem unterschiedlicher Schichtung aufgebaut wurden [18 bis 20].

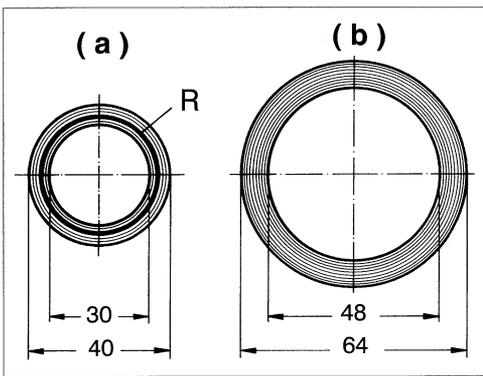


Bild 2.2: Querschnitte von gewickelten GFK-Drehrohrfedern; (a) Pkw-Tragfeder mit Rißstopperschicht R, (b) Lkw-Stabilisator

Während sich die Wickeltechnik besonders für die Herstellung von röhrenförmigen Teilen oder andersartigen Hohlkörpern eignet, werden platten- oder schalenförmige Bauteile, an die hohe Festigkeitsanforderungen gestellt werden, vorteilhaft aus sogenannten Prepregs gefertigt. Dabei handelt es sich um Bahnen aus Fasermaterial – häufig parallel gerichteten Fasersträngen – die mit Matrixmaterial vorimprägniert wurden. Durch eine gewisse Vorreaktion wurde das Matrixmaterial schon aus dem flüssigen in einen pastös-klebrigen Zustand überführt, was die Handhabung sehr erleichtert. Ein Prepreg-Laminat entsteht, indem

Prepreg-Zuschnitte nach einem Verlegeplan geschichtet werden und anschließend unter Hitze und leichtem Druck das Matrixmaterial ausgehärtet wird [21,22].

Die einzelnen UD-Schichten eines Prepreg-Laminats können jeweils aus einer oder mehreren Prepreglagen gebildet werden, so daß auch hier – wie in Wickelteilen – Dicken der einzelnen UD-Schichten von etwa 0,1 mm bis maximal 1 mm die Regel sind. Laminatdicken zwischen 1 mm und 10 mm sind üblich, jedoch sind auch dünnere und dickere Laminata herstellbar.

Auch bei solchen Laminaten wird man bestrebt sein, die Faserrichtung von Lage zu Lage zu variieren. Wenn für das Laminat ebene Beanspruchungen zu erwarten sind, strebt man eine "homogene" Schichtung an, d.h. die Lagen mit jeweils gleicher Faserrichtung werden möglichst gleichmäßig über die Dicke des Laminats verteilt. Außerdem ist eine symmetrische Schichtung bezüglich der Mittelebene vorteilhaft. Dadurch können unerwünschte Krümmungen und Verwindungen der Laminata bei der Belastung, aber auch bei Änderungen der Temperatur und des Feuchtegehalts vermieden werden. Wird das Laminat jedoch auch durch Biege- und Torsionsmomente belastet, ist man u.U. gezwungen, eine sandwichartige Schichtung vorzunehmen, d.h. mehrere Prepreglagen mit gleicher (oder besser: fast gleicher) Faserrichtung zusammenzufassen. Wenn irgend möglich, wird man auch in solchen Fällen zumindest eine kleine Winkeldifferenz von etwa 10° bis 20° zwischen den Faserrichtungen der einzelnen Prepreglagen vorsehen, damit ein in einer Schicht entstandener Riß an den Fasern der nächsten Schicht gestoppt wird. (Ob hierfür noch kleinere Winkeldifferenzen ausreichen, müßte experimentell geklärt werden.)

Meistens findet sich in allen Schichten eines Laminats der gleiche Fasertyp. Gelegentlich kommen aber auch sogenannte Hybrid-Laminata vor, bei denen – auch im Hinblick auf einen erwünschten Sandwicheffekt – z.B. die inneren Schichten mit Glasfasern und die äußeren mit Kohlenstoffasern ausgeführt werden.

Bei modernen Segelflugzeugen werden die Tragflügel und Rumpfe fast ausschließlich als Faserverbundbauteile ausgeführt. Diese werden aus Kostengründen vorwiegend in handwerklichen Laminierverfahren unter Verwendung von Glasseiden- und Kohlenstoffasergeweben hergestellt. Um stärkere Fadenwelligkeit zu vermeiden, verwendet man vorzugsweise kettstarke Gewebe, s. Bild 7.3 auf S. 96, bei denen die hauptsächlich lasttragenden Kettfäden nur eine sehr geringe Welligkeit aufweisen. Statt einer einzelnen Gewebelage mit gleich vielen Kett- und Schuffäden werden zwei unter 90° gekreuzte Lagen kettstarken Gewebes eingesetzt. So werden beispielsweise $\pm 45^\circ$ -Laminata für torsionssteife Schalen hergestellt.

Man darf somit annehmen, daß hochfeste Laminata, die einer Festigkeitsanalyse bedürfen, keine ausgeprägte Fadenwelligkeit aufweisen, deren Modellierung [23] Schwierigkeiten bereiten würde. Bei den meisten hochbeanspruchten Laminaten dürfte der Schichtenverbund aus UD-Schichten ein gut an die Wirklichkeit angepaßtes Modell darstellen.

2.2 Zwischenfaserbrüche

Im Hinblick auf die Entwicklung einer Theorie zum Festigkeitsverhalten von Laminaten wird hier ausschließlich das Bruchverhalten einer UD-Schicht innerhalb eines Laminats und nicht einer einzelnen UD-Schicht betrachtet. Unter Zwischenfaserbruch (Zfb) wird – wie eingangs schon erwähnt – eine Werkstofftrennung verstanden, die zwischen den Fasern, d.h. vorwiegend durch das Matrixmaterial, aber gelegentlich auch längs der Faser/Matrix-Grenzflächen verläuft und die UD-Schicht in ihrer gesamten Dicke durchtrennt. Wie weit sich ein Zfb in der Faserrichtung erstreckt, hängt von verschiedenen Einflußgrößen wie Homogenität des Spannungszustands, Sprödigkeit des Werkstoffs usw. ab.

Beim Bruchversuch an einem UD-Probekörper würde ein solcher Zfb natürlich zu einem Totalbruch des Probekörpers führen, der meistens ein ausgesprochener Sprödbbruch ist, was man bei der Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen UD-Probekörpern [24] beobachten kann. In einem Laminat wird aber durch einen Zfb allenfalls der Zusammenhalt der Schichten in einem kleinen örtlich begrenzten Bereich etwas gestört. Die vom Zfb betroffene Schicht bleibt weiterhin mit ihren Nachbarschichten verbunden; d.h. ein Zfb macht sich zunächst nur als Riß in der betroffenen Schicht bemerkbar. Dadurch wird der Kraftfluß der Schicht an der Bruchstelle unterbrochen oder zumindest gestört, es erfolgt eine örtliche Umleitung der Schichtkraft über die Nachbarschichten. Meistens verläuft der Riß ziemlich gradlinig in Dickenrichtung, aber z.B. bei überwiegender Quer-Druckbeanspruchung ist die Rißebene um etwa $+45^\circ$ oder -45° gegen die Dickenrichtung geneigt. Ein Riß infolge Zfb in einer UD-Schicht wird fast immer an den Fasern der Nachbarschichten gestoppt, weil nicht hinreichend Energie zur Verfügung steht, um hochfeste und steife Fasern zu durchtrennen. Dabei entstehen an den Fasern, die den Riß stoppen, "Kerbspannungen". Diese werden später noch eingehend erörtert.

Wenn, nachdem der erste Riß infolge Zfb in einer UD-Schicht aufgetreten ist, die Belastung weiter gesteigert wird, bilden sich in dieser Schicht in dichter Folge mehr und mehr Risse, und zwar in beinahe regelmäßigen geometrischen Abständen. Bei GFK-Laminaten kann man beobachten, daß – falls die Risse im wesentlichen durch eine Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(+)}$ verursacht werden – die Rißdichte sich schließlich trotz weiterer Laststeigerung kaum noch erhöht. Man spricht davon, daß die Schicht nun mit Rissen "gesättigt" sei. Es hat sich dann bei nahezu regelmäßiger Verteilung der Risse ein mittlerer Rißabstand eingestellt, der, grob gesprochen, etwa das 0,5- bis 1,5-fache der Schichtdicke beträgt. Dieser Zustand wird in der Literatur häufig als der charakteristische Schädigungszustand (Characteristic Damage State, CDS) bezeichnet, weil er offenbar auf verschiedene Weise, auch unabhängig von der Belastungsgeschichte, erreicht werden kann.

Die Tatsache, daß verschiedene Kombinationen von Quer-Normalspannung σ_2 und Quer/Längs-Schubspannung τ_{21} sehr unterschiedliche Ausprägungen (Modi) von Zwischen-

faserbrüchen zur Folge haben können, wird in der Literatur viel zu wenig beachtet. Wenn man sich zunächst auf den ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{21})$ -Spannungszustand einer UD-Schicht beschränkt, sollte man bei der makromechanischen Betrachtungsweise drei Bruch-Modi unterscheiden.

Modus A

Der Zfb wird gemeinsam durch eine Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und eine Quer/Längs-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\parallel}$ bewirkt, d.h. bei dem hier betrachteten Spannungszustand durch die Spannungen σ_2 und τ_{21} . Auch die Grenzfälle, in denen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ oder $\tau_{\perp\parallel}$ jeweils allein den Bruch erzeugt, gehören dazu. Die **Risse** verlaufen in Dickenrichtung, sie entstehen also **in der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} , Bild 2.3**. Sie öffnen sich um so mehr, je höher $\sigma_{\perp}^{(+)}$ im Vergleich zu $\tau_{\perp\parallel}$ ist. Dadurch werden die Rißufer spannungsfrei. Erst nach einer gewissen "Anlaufstrecke" wird in der gerissenen Schicht infolge der interlaminaren Schubspannungen, die zwischen der gerissenen Schicht und den Nachbarschichten entstehen, wieder eine Spannungshöhe erreicht, die zur Entstehung eines neuen Risses genügt. So erklärt sich auch, daß der Rißabstand nicht beliebig klein werden kann, s. auch Bild 2.6 auf S. 20.



Bild 2.3: Risse infolge von Zwischenfaserbrüchen des Modus A in einer vielschichtigen GFK-Drehrohrfeder (Beanspruchungsrichtung waagrecht). Sie öffnen sich umso mehr, je höher die $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung im Vergleich zur $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung ist.

Bei einer gleichförmigen Laststeigerung entstehen nach dem Erscheinen des ersten Zfb zunächst gehäuft weitere Risse, was sich auch durch eine intensive Schallemission anzeigt. Später ebbt die Rißbildung merklich ab.

Die Tatsache, daß die betroffene Schicht an den gerissenen Stellen kraftfrei geworden ist und erst nach einer Anlaufstrecke wieder mehr oder weniger stark mitträgt, äußert sich nach außen hin so, als ob sich die "Quer-Steifigkeiten" der Schicht im Mittel verringert hätten, und zwar um so mehr, je mehr Risse entstanden sind. Diese Beobachtung wird später bei der Formulierung der entsprechenden Degradationsmodelle genutzt. Die Fasern der betroffenen Schicht werden durch die Zwischenfaser-Rißbildung kaum in Mitleidenschaft gezogen, so daß die Längssteifigkeit und -festigkeit der Schicht nahezu unverändert erhalten bleiben.

Modus B

Die Zwischenfaserrisse, die diesem Bruch-Modus zuzuordnen sind, verlaufen ebenso wie die nach Modus A **in der Wirkebene von σ_2 und τ_{21}** , aber sie können sich nicht öffnen, denn auf den Rißufern wirkt eine Quer-Druckbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(-)}$. Diese ist beim Modus B aber kleiner als oder höchstens gleich groß wie die $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, die im Grunde die alleinige Ursache des Bruches ist. Die $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung fördert nämlich nicht den Bruch, wie es bei einer $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung der Fall ist, sondern im Gegenteil, sie behindert ihn. In der Werkstoffkunde spricht man von einer "inneren Reibung", die mit der Höhe der $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Druckbeanspruchung anwächst und den $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbruch zunehmend erschwert.

Risse, die bei Modus B entstehen, bringen der Schicht kaum eine Druck-Entlastung, weil sie sich nicht öffnen können. Im Mittel erscheint der Schubmodul $G_{\perp\parallel}$ einer solchen Schicht etwas verringert, aber je höher die $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung ist, um so mehr Schubkraft kann auch durch Reibung der aufeinandergepreßten Rißflächen übertragen werden.

In Laminaten mit drei und mehr Faserrichtungen kommen Zfb des Modus B selten vor, weil hierfür Spannungszustände nötig sind, bei denen $\tau_{\perp\parallel}$ dem Betrage nach größer ist als $\sigma_{\perp}^{(-)}$. Wegen der ausgeprägt nicht-linearen (τ_{21}, γ_{21})-Zusammenhänge können die zu hohen τ_{21} -Spannungen gehörenden großen Schubverformungen γ_{21} nur in seltenen Ausnahmefällen auftreten, weil meist vorher die Bruchdehnung der Fasern im Laminat erreicht wird.

Modus C

Diese Bruchart tritt beim ebenen (σ_2, τ_{21})-Spannungszustand dann auf, wenn σ_2 eine Quer-Druckspannung ist und sie dem Betrage nach – grob gesprochen – gleich oder größer als die Schubspannung τ_{21} ist. Das bestimmende Merkmal eines Zfb nach Modus C besteht darin, daß bei einer kombinierten Beanspruchung durch $\sigma_2 < 0$ und τ_{21} der **Bruch nicht in der** in Dickenrichtung verlaufenden **gemeinsamen Wirkebene der beiden Spannungen σ_2 und τ_{21}** stattfindet, sondern in einer gegenüber der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} um einen Winkel θ_{fp} (fp $\hat{=}$ fracture plane) geneigten Bruchebene. In dieser wirken nicht mehr allein eine $\sigma_{\perp}^{(-)}$ - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, sondern zusätzlich eine Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$. Hierauf wird später noch ausführlich eingegangen. Der Bruchwinkel θ_{fp} (Winkel zwischen der Wirkebene von σ_2, τ_{21} und der Bruchebene) kann je nach der Größe des Verhältnisses σ_2/τ_{21} von 0° beim Übergang vom Modus B zum Modus C auf etwa $\pm 50^\circ$ bei reiner Quer-Druckbeanspruchung anwachsen. Mit den bereits kurz erwähnten neuartigen Zfb-Kriterien können all diese Zusammenhänge auch rechnerisch erfaßt werden.

Hier ist zunächst die Feststellung wichtig, daß Zwischenfaserbrüche des Modus C im Gegensatz zu solchen nach Modus A (und B), die relativ "harmlos" sind, für ein Laminat sehr gefährlich werden können, weil die Keilwirkung des schrägen Bruches im Laminat in Dickenrichtung wirkende Sprengkräfte hervorruft. Daß all dies keine bloße Theorie ist, hat sich an

einem sehr lehrreichen Beispiel aus der Praxis der Bauteilentwicklung der letzten Jahre für den Pkw-Bereich gezeigt, und zwar an der gewickelten Drehrohrfeder, deren Querschnitt aus Bild 2.2 hervorgeht. Es war eine sehr kurze Drehfeder mit einer Einbaulänge ≤ 500 mm zu entwickeln, die bei einem maximalen Verdrehwinkel von 30° als Tragfeder an der Hinterachse eines Pkw fungieren sollte [18 bis 20,25]. Das machte eine äußerst hohe Werkstoffausnutzung erforderlich, die nur mit einem unkonventionellen Laminataufbau erzielt werden konnte. Am Beginn dieser Bauteilentwicklung bestand die Wandung des Drehrohres aus einer dünnen inneren UD-Schicht aus drei Wickellagen mit einem Wickelwinkel von -45° und einer dickeren äußeren UD-Schicht aus sieben Wickellagen mit einem Wickelwinkel von $+45^\circ$. Zwischen beiden Schichten war eine Aramidfaserlage als "Rißstopperschicht" eingefügt, welche die Kerbwirkung mildern sollte, die von den frühzeitig in der Innenschicht entstehenden Zwischenfaserbrüchen vom Modus A auf die hoch zugbeanspruchten Fasern der Außenschicht ausgeübt wird, **Bild 2.4**.

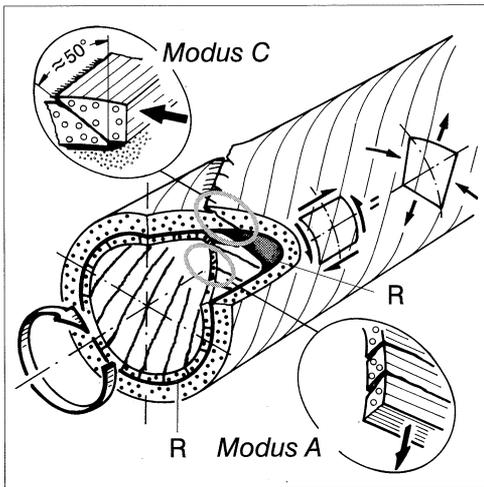


Bild 2.4: Pkw-Drehrohrfeder mit Zwischenfaserbrüchen des Modus A in der Innenschicht und einem Zfb vom Modus C in der Außenschicht. Zwischen Innen- und Außenschicht ist die Rißstopperschicht R eingefügt.

Die Modus A-Risse in der Innenschicht erwiesen sich bei diesem Bauteil als völlig harmlos; obwohl sie bereits nach wenigen Schwingspielen entstanden, ertrug die Drehfeder im Mittel $2 \cdot 10^6$ Schwingspiele mit Höchstlast, ohne daß weitere sichtbare Schäden eintraten. Im Gegensatz dazu führte ein einziger Riß vom Modus C in der Außenschicht, der sich als Folge der dort herrschenden hohen Quer-Druckspannung einstellte, zu einem abrupten Versagen der Drehfeder. Die gleiche Erscheinung wurde an vielen geprüften Prototypen beobachtet. Die Bruchwinkel der Zfb nach Modus C lagen stets bei etwa $\pm 50^\circ$. Daraus resultierte, weil die hohe Druckspannung σ_2 trotz des Risses weiter über die Rißflächen übertragen wurde, eine Art Keilwirkung mit einer radial nach innen gerichteten Kraftkomponente. Diese ver-

ursachte einen schlagartigen "Kollaps" der dünnen Innenschicht und damit den Totalbruch des volltordierten Rohres. Im Abschnitt 2.5 wird dieser Vorgang näher erläutert.

Auch bei allgemein räumlichen Spannungszuständen ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$) kann die Unterscheidung der Zfb-Modi A, B, C beibehalten werden. Allerdings kann der sich einstellende Bruchwinkel oder Bruchwinkelbereich – z.B. bei der (σ_2, τ_{21})-Beanspruchung 0° bzw. 0° bis $\pm 50^\circ$ – nun nicht mehr a priori den Modi zugeordnet werden. Die verschiedenen Bruch-Modi lassen sich im allgemeinen Fall nur noch durch **die auf der Bruchebene wirkende Beanspruchungskombination** charakterisieren.

Modus A: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ (oder es wirkt $\sigma_{\perp}^{(+)}$ bzw. $\tau_{\perp\parallel}$ allein).

Modus B: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$.

Modus C: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\perp}$ oder eine Dreierkombination $\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand kann noch eine vierte Bruchart auftreten, die folgendermaßen gekennzeichnet ist:

Modus A*: Auf der Bruchebene wirkt eine Beanspruchungskombination $\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

2.3 Delaminationen

Ebenso wie die zu Zwischenfaserbrüchen neigenden faserparallelen Schnittebenen der UD-Schicht sind auch die Grenzflächen, mit denen Schichten in einem Laminat an ihre Nachbarschichten grenzen, ausgesprochene Schwachstellen, weil in ihnen keine Faserverstärkung wirksam wird. In beiden Fällen wird wenig Energie benötigt, um einen Bruch zu erzeugen, denn es müssen dabei keine hochfesten und steifen Fasern durchtrennt werden. Wenn vorher der Begriff "Zwischenfaserbrüche" benutzt worden ist, liegt es nahe, bei Werkstofftrennungen zwischen Einzelschichten eines Laminats von "Zwischenschichtbrüchen" zu sprechen. Dies ist aber unüblich, der gebräuchliche Begriff ist "Delamination".

Eine Schichtentrennung kann eigentlich nur von Spannungen bewirkt werden, die als Zugspannung senkrecht zur Schichtgrenzfläche oder als Schubspannungen in der Grenzfläche der Schichten wirken. Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$) können dies nur die Spannungen σ_3 (sofern positiv), τ_{23} (richtiger τ_{32}) und τ_{31} sein. Man nennt sie die "interlaminaren Spannungen". (Dieser Begriff ist an sich irreführend, denn aus Gleichgewichtsgründen können diese Spannungen nicht nur zwischen den Schichten auftreten, sondern müssen auch in die Schichten hineinwirken.) Spannungsanalysen an Faserverbundbauteilen, die nicht außergewöhnlich "dickwandig" sind und deren Wandungen keine extrem

kleinen Krümmungsradien aufweisen, zeigen aber stets, daß sich in ungestörten Bereichen verhältnismäßig niedrige Werte für σ_3 , τ_{32} und τ_{31} errechnen, so daß man aufgrund üblicher Festigkeitsbetrachtungen auf keinen Fall eine Bruchauslösung von ihnen erwarten kann, wenn nicht schon Anrisse vorhanden sind. Bei zukünftigen experimentellen Untersuchungen sollte man sorgfältig prüfen, ob den zu beobachtenden Delaminationen nicht immer Zwischenfaserrisse vorausgehen, die erst die für die Delamination erforderlichen interlaminaren Spannungen hervorrufen.

Bei jahrelangen Entwicklungsarbeiten an hochbeanspruchten Faserverbundbauteilen, wie z.B. wechselnd beanspruchten GFK-Drehrohrfedern, die als Lkw-Stabilisatoren eingesetzt werden sollen [26], und Pkw-Antriebswellen [27] hat sich immer wieder gezeigt, daß, wenn man von Schlagbeschädigungen (impact) und Beulvorgängen einmal absieht, intensive Delaminationen meist erst eintreten, wenn vorher Zwischenfaserbrüche entstanden sind. Es bedarf also offenbar zur Auslösung von Delaminationen der Spannungskonzentrationen im Bereich der Rißspitze von Zwischenfaserbrüchen.

An Kreuzverbunden aus UD-Schichten ($(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten) kann man fast immer beobachten, daß ein Modus A-Zwischenfaserbruch zunächst keine Fasern der Nachbarschicht durchtrennt, sondern statt dessen zu einer kleinen, von der Rißspitze ausgehenden Delamination in der Grenzfläche der Schichten führt. Diese breitet sich oft zunächst nur einseitig, später auch beidseitig von der Rißspitze her aus, **Bild 2.5**.

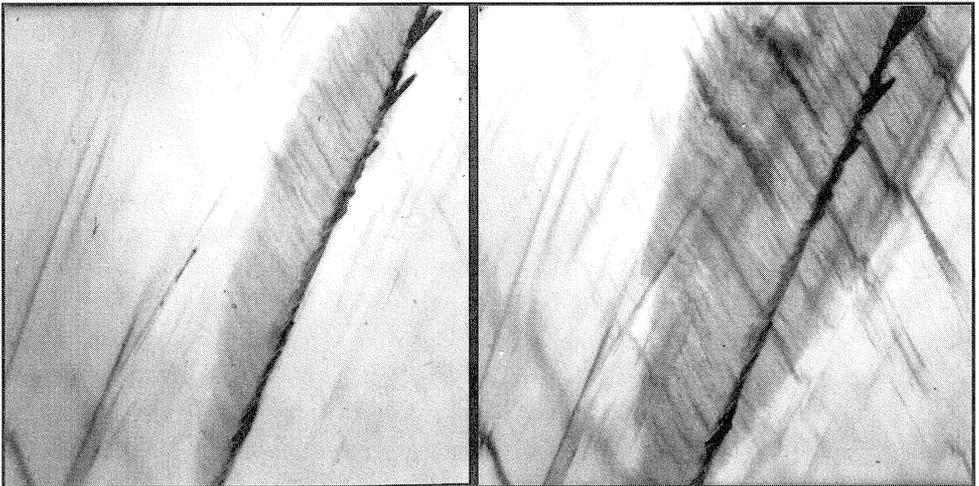


Bild 2.5: Zwischenfaserriß vom Modus A im Durchlicht [27], links mit einseitiger, rechts mit beidseitiger Delamination. (Vergrößerung 20:1)

Delaminationen wachsen sowohl bei monoton ansteigender Belastung als auch bei schwingender Belastung mit konstanter Amplitude. Im Extremfall kann sich durch fortschreitende Delamination die äußerste UD-Schicht vollständig vom übrigen Körper ablösen, wie es bei der Lebensdauererprobung von Pkw-Antriebswellen beobachtet wurde [27]. Es handelt sich also um Rißausbreitung, ein typisches Problem der Bruchmechanik. Ausgangspunkt der Delamination sind offensichtlich nicht relativ homogene Spannungszustände, sondern äußerst ungleichförmige Spannungsverteilungen, wie sie sich z.B. für den Bereich einer UD-Schicht zwischen zwei Modus A-Rissen errechnen lassen [17], **Bild 2.6**.

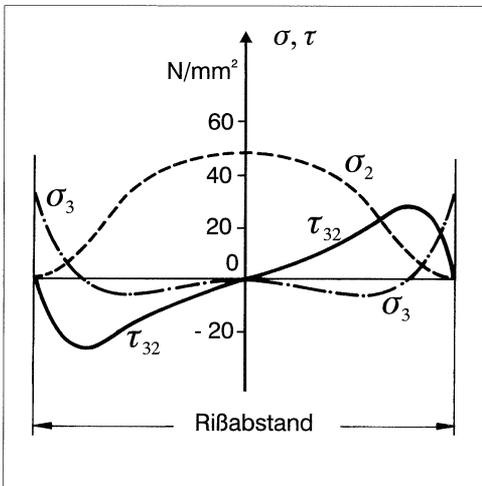


Bild 2.6: Intra- und interlaminare Spannungen der 90° -Schicht zwischen zwei Modus A-Rissen eines $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminats bei einachsigem Zug σ_2 in 0° -Richtung (nach [17,68])

Bereits diese kurzen Ausführungen dürften deutlich gemacht haben, daß eine Festigkeitsanalyse hinsichtlich Delaminationen eine außerordentlich schwierige Aufgabe ist; jedenfalls ist sie um ein Vielfaches schwieriger als die Zfb-Analyse. Auf diesem Gebiet ist noch viel Forschungsarbeit nötig, denn Delaminationen sind – wenn auch meistens indirekt – mitentscheidend für das Versagen von Bauteilen. Dies trifft ganz besonders für wechselnd beanspruchte Bauteile zu [26,27]. Da die Biege- und Drillsteifigkeit eines Laminats durch fortgeschrittene Delamination reduziert wird, kann diese auch zu einem Versagen des Bauteils durch Beulen oder Knicken beitragen.

Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß – wie im vorigen Abschnitt dargelegt – Zwischenfaserbrüche des Modus C wegen ihrer Sprengwirkung Delaminationen und örtliches Ausbeulen von Nachbarschichten begünstigen.

2.4 Faserbrüche

Im Grunde genommen sind Faserbrüche die einzigen "erwünschten" Brüche in Faserverbundbauteilen, denn die Fasern sind die eigentlichen Tragelemente, und diese sollten bis zu ihrer Festigkeitsgrenze ausgelastet werden können, bevor irgend etwas anderes bricht. Die Fasern erfahren im Verbund wegen ihrer vergleichsweise hohen Längssteifigkeit sehr hohe Spannungen in der Längsrichtung. In Querrichtung können die auf die Fasern einwirkenden Spannungen nicht höher werden als diejenigen, die von der Matrix oder der Faser/Matrix-Grenzschicht ertragen werden. Diese sind in der Regel um eine Größenordnung kleiner als die ertragbaren Spannungen in faserparalleler Richtung. Für die isotropen Glasfasern erscheinen die "Querspannungen" $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ deshalb ziemlich belanglos; bei stark anisotropen Kohlenstofffasern und Fasern aus aromatischem Polyamid (Aramid) mag sich dies etwas anders verhalten [28,29].

Wie bereits erwähnt, wird hier unter Faserbruch (Fb) keinesfalls der Bruch einzelner Elementarfasern verstanden, sondern das nahezu gleichzeitige "Brechen" einer sehr großen Zahl von Elementarfasern, durch das die Tragfähigkeit einer Schicht in Faserrichtung über eine größere Breite (Größenordnung cm) weitgehend verschwindet. Im Falle einer Zugbeanspruchung in Faserrichtung ist es durchaus berechtigt, von "Brechen" oder "Zerreißen" zu sprechen, während bei Längs-Druckbeanspruchung vielfach die Tragfähigkeit der Fasern dadurch erschöpft wird, daß ihre elastische Stützung durch die Matrix nicht mehr ausreicht, ein Ausknicken zu verhindern. Man spricht von "innerem Knicken" oder "Mikroknicken". Hierbei spielen u.U. Schubverformungen der Matrix, mit der die stützende Matrix der Knick-tendenz der Fasern nachgibt, eine wichtige Rolle [29]. Bei stark anisotropen Kohlenstofffasern ist möglicherweise auch deren Schubfestigkeit für die Festigkeit bei Zug- und Druck in Faser-Längsrichtung maßgebend [28 bis 30]. Diese Fragen sind noch nicht restlos geklärt.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß der Bruch von Zigtausenden von Elementarfasern statistischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Wie man unschwer bei einem Zerreißversuch an einem UD-Probekörper feststellen kann, brechen keineswegs alle Elementarfasern gleichzeitig, sondern schon ab etwa 70 bis 80% der Bruchlast machen sich die ersten Brüche einzelner Elementarfasern und später auch von ganzen Faserbündeln bemerkbar.

Anders als bei Zwischenfaserbrüchen kann man bei Faserbrüchen kaum von Bruchebenen sprechen. In Bereichen, in denen Faserbruch – in der hier gemeinten Bedeutung – stattfindet, wird der Verbund von Faser und Matrix infolge der hohen Energiefreisetzung oft vollständig aufgelöst. Zugbrüche außen liegender Schichten zeigen häufig ein pinselartiges Aussehen. Das bedeutet, daß Degradationsmodelle, die dem Verbund nach dem Faserbruch noch Steifigkeit und Festigkeit quer zur Faserrichtung belassen, unrealistisch sind.

In vielen Fällen richtet der Faserbruch einer Schicht eines Laminats auch Schäden in den Nachbarschichten an, die u.U. sehr gravierend sein können. Es sind dies vor allem Zwi-

schenfaserbrüche und Delaminationen; aber auch ein Faserbruch einer anderen Schicht, deren Faserspannung nahe an der Bruchgrenze angelangt war, kann ausgelöst werden.

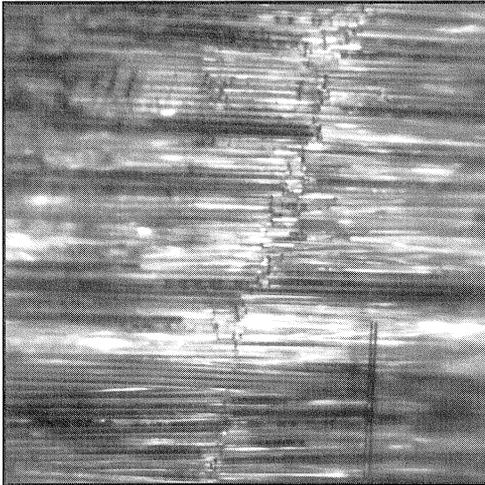


Bild 2.7: Faserbruchfront in einer UD-Schicht einer Pkw-Antriebswelle nach $1,7 \cdot 10^6$ Schwingspielen [27] (Vergrößerung 20:1)

Allenfalls bei schwingender Beanspruchung entwickeln sich gelegentlich gradlinig verlaufende, örtlich begrenzte Bruchfronten, **Bild 2.7**, insbesondere dort, wo der Faserbruch von der Ankerbung durch einen Zwischenfaser-Riß der Nachbarschicht initiiert wurde.

Faserbruch in der hier benutzten Bedeutung tritt bei monotoner Laststeigerung nahezu schlagartig ein. Es ist deshalb schwierig festzustellen, welche Vorgänge sich im Einzelnen abspielen, und wie sich insbesondere der großflächige Bruch bei Zug entwickelt.

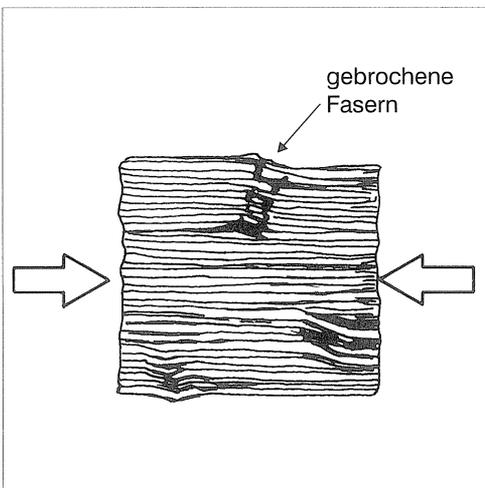


Bild 2.8: Darstellung des Schubknickens (kinking) als Vorstufe des Faser-Druckbruchs des UD-Faser-Matrix-Verbunds

Als Vorstufe des Faser-Druckbruches lassen sich oft örtlich begrenzte Bereiche beobachten, in denen die Fasern ein Schubknicken (kinking) erleiden [29], **Bild 2.8**. Mehrere solche Bereiche mit abgeknickten Fasern können zusammenwachsen, wodurch die Nachbarbereiche zusätzlich Kraft übernehmen müssen. Wenn auch diese plötzlich knicken, kann es zum großflächigen Bruch kommen. Dabei spaltet sich der UD-Verbund auf und einzelne balkenartige Partien brechen infolge der auftretenden örtlichen Biegebeanspruchung. Es entsteht meistens ein ziemlich ausgedehnter und stark zerklüfteter Bruchbereich, **Bild 2.9**.



Bild 2.9: Faserbruch als Druckbruch im UD-Druckgurt eines GFK-Kastenträgers bei zügiger Biegebeanspruchung bis zum Bruch [70]

2.5 Laminat-Versagen

Aus dem Vorausgegangenen ist bereits ersichtlich, daß selbst ein nicht zum Totalbruch führender Faserbruch so erhebliche Zerstörungen im Laminat bewirkt, daß es dadurch unbrauchbar werden kann. Man wird deshalb normalerweise den Eintritt eines Fb in einer Schicht auch als die "Bruchgrenze" des Laminats ansehen, obwohl in einigen Fällen noch eine gewisse Resttragfähigkeit erhalten bleibt. Das kann insbesondere dann der Fall sein, wenn die vom Fb betroffene Schicht relativ dünn ist und im Laminat noch mindestens drei weitere Faserrichtungen vorkommen, in denen die Fasern noch nicht sehr hoch beansprucht sind [31]. Aber auch in einem solchen Fall kann das Laminat infolge der mit dem Fb einhergehenden erheblichen örtlichen Zerstörungen funktionsunfähig geworden sein.

Es kommt relativ selten vor, daß ein Bauteil während seiner gesamten Einsatzdauer immer nur durch einen ganz bestimmten Lastfall beansprucht wird, d.h. daß die an ihm angreifenden Lasten (Kräfte und Momente) stets untereinander in unveränderlichen Verhältnissen

stehen. Der ausschließlich durch Innendruck belastete Behälter ist eine der seltenen Ausnahmen. Tragflügel, Rumpfe und Leitwerke von Flugzeugen müssen hingegen einer Vielzahl von sehr verschiedenen Belastungszuständen (Lastfällen) standhalten. Wenn nicht ein einzelner Lastfall mit seinen Beanspruchungen absolut dominierend ist, sollten die Wandungen solcher Bauteile unbedingt mindestens drei, möglichst recht unterschiedliche Faserrichtungen aufweisen [31]. Dies folgt aus der Netztheorie, s. Abschnitt 3.2.

Für eine reine Innendruckbelastung eines dünnwandigen kreiszylindrischen Rohres ist eine $\pm 55^\circ$ -Wicklung eine herstelltechnisch günstige und zugleich beanspruchungsgerechte Ausführung. Sollte sich das Verhältnis von Umfangsspannung zu Axialspannung, das bei reiner Innendruckbelastung 2:1 beträgt, aber einmal drastisch ändern, z.B. dahingehend, daß die Axialspannung ebenso groß wird wie die Umfangsspannung, wäre das von den Fasern gebildete "Netzwerk" allein nicht imstande, die Belastung aufzunehmen. Es entstehen deshalb hohe σ_{\perp} - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchungen, die zu massenhaft auftretenden Zwischenfaserbrüchen vom Modus A führen. Diese sind aber in diesem Fall nicht harmlos wie bei einem nach der Netztheorie tragfähigen Laminat, denn die an den Zwischenfaser-Bruchstellen nicht mehr übertragbaren Kräfte können nicht in Fasern umgelenkt werden, **Bild 2.10**.

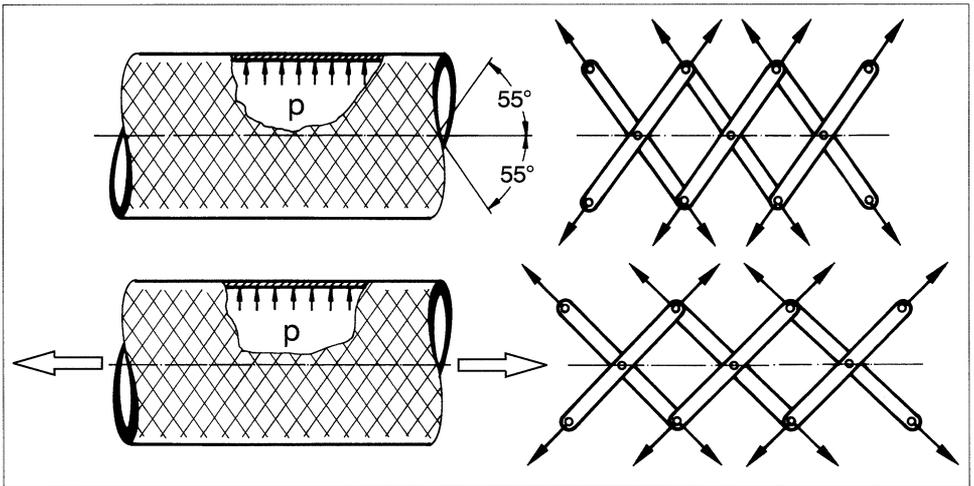


Bild 2.10: Bei einem $\pm 55^\circ$ -Rohr unter axialer Zugspannung, die gleich hoch ist wie die Umfangsspannung, weichen die Fasern wie bei einer Nürnberger Schere der Beanspruchung aus, bis sie die $\pm 45^\circ$ -Lage erreicht haben.

Während sich bei einem beanspruchungsgerechter ausgelegten ($0^\circ, \pm 60^\circ$)-Laminat mit fortschreitender Ribbildung die Kräfte in den Fasern konzentrieren, entziehen sich beim betrach-

teten $\pm 55^\circ$ -Rohr die Fasern wie bei einer "Nürnberger Schere" weitgehend der Beanspruchung. Sie "versuchen" dabei in die Richtungen zu gelangen, die für ein Netzwerk bei gleich hoher Axial- und Umfangsspannung richtig wären, d.h. in die $\pm 45^\circ$ -Richtungen (s. Gl. (3.6) auf S. 33). Wegen der fortschreitenden Reißbildung und, weil die Fasern die Kräfte nicht übernehmen können, treten extrem große Verformungen auf. Diese gehen mit zunehmenden Zerstörungen durch Risse und Delaminationen einher, bis zum Schluß durch örtliche Biegung und Verdrehung von Faserbündeln auch Fasern brechen, **Bild 2.11**.

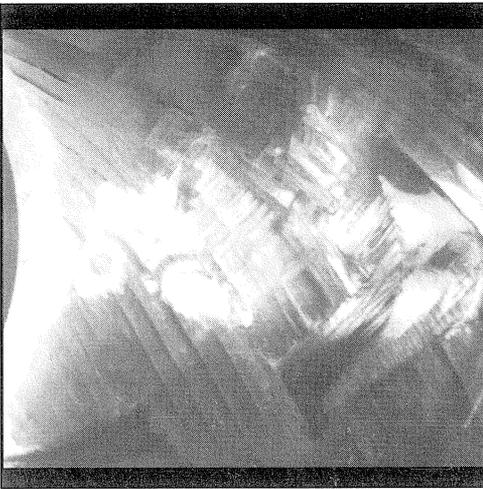


Bild 2.11: Fortschreitende Zerstörung eines $\pm 55^\circ$ -Rohres bei gleich hoher Axial- und Umfangsspannung

Diese undefinierte Versagensart in Form einer fortschreitenden Auflösung des Laminats läßt sich mit den heutigen Mitteln kaum einigermaßen wirklichkeitsgetreu rechnerisch simulieren. Aber nicht nur deshalb vermeiden Faserverbund-Konstrukteure solche nicht an die Beanspruchung angepaßten Lamine, sondern vor allem, weil in ihnen der wertvolle Faserwerkstoff höchst unvollkommen ausgenutzt würde.

Ein anderes Beispiel für ein nicht beanspruchungsgerecht ausgelegtes Bauteil wäre ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Rohr, das auch erheblichen Torsionsmomenten ausgesetzt ist. Während Axial- und Umfangsbeanspruchung sehr gut von einer solchen Faserstruktur aufgenommen werden kann, beteiligen sich die Fasern kaum an der Übertragung der Torsion. Sie verschieben sich infolge der Schubbeanspruchung nur wie die Stäbe eines Parallelogramm-Gestänges, **Bild 2.12**. Die aus der Torsion herrührende Schubbeanspruchung der Rohrwand muß im wesentlichen durch $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung der 0° - und 90° -Schichten aufgenommen werden. Die zugehörige Quer/Längs-Schubfestigkeit der UD-Schichten dürfte $R_{\perp\parallel} \approx 50$ bis 100 N/mm^2 betragen. Trotzdem erträgt die Rohrwandung Schubspannungen (bezogen auf die Axial- und Umfangsrichtung), die $R_{\perp\parallel}$ übersteigen und zwar umso mehr, je feinschichtiger die Wandung ist. Das

”gerissene” Laminat verhält sich so ähnlich wie ein Block aus kreuzweise geschichteten Bretterlagen, bei dem die Bretter nur auf ihren Breitseiten, nicht aber auf ihren Schmalseiten ($\hat{=}$ Rißflächen) miteinander verleimt sind. Bei einer Schubbeanspruchung spalten die Bretter immer mehr auf und danach brechen die großflächigen Verklebungen. Im Laminat äußert sich dieser Vorgang als fortschreitende Rißbildung und nachfolgende Delamination.

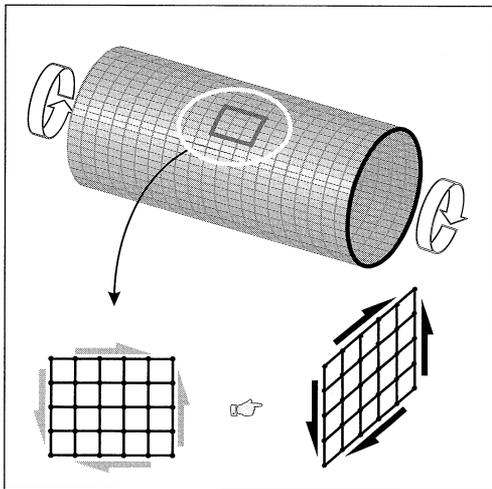


Bild 2.12: Bei einem (0°, 90°)-Rohr unter Torsion weichen die Fasern wie bei einem Parallelogrammgestänge der Beanspruchung aus.

Etwas Ähnliches spielt sich ab, wenn ein $\pm 45^\circ$ -Rohr einachsigt durch Zug oder Druck in Axialrichtung belastet wird. Die Schichten erleiden eine kombinierte ($\sigma_\perp, \tau_{\parallel}$)-Beanspruchung, und auch hier ist eine Kraftumlagerung in die Fasern kaum möglich.

Wenn es sich statt um ein Rohr um einen Plattenstreifen handelt, ist die Beanspruchungssituation noch ungünstiger, weil nun an den seitlichen Rändern auch noch Delaminationen infolge der dort wirkenden örtlich sehr hohen interlaminaren Spannungen auftreten [31].

In der Vergangenheit sind häufig $\pm\omega$ -Laminaten (Ausgeglichene Winkelverbunde, Angle Ply Laminates) in Zerreißversuchen geprüft worden, um ”dem Konstrukteur Kennwerte an die Hand zu geben” und um Bruchkriterien auf ihre Brauchbarkeit zu überprüfen, z.B. in [32,33]. Dies ist wegen der geschilderten Vorgänge in solchen Laminaten abwegig. Weder sind solche undefinierten ”Festigkeitskriterien” für eine Faserverbundkonstruktion von Bedeutung, noch kann man mit Bruchkriterien den sich einstellenden fortschreitenden Zerstörungsvorgang, bei dem keine wirksame Umlagerung der Kräfte in die Fasern erfolgen kann, einigermaßen realistisch beschreiben.

Anders verhält es sich mit Laminaten, die mindestens drei merklich voneinander verschiedene Faserrichtungen aufweisen. Fortschreitende Rißbildung infolge Zfb führt hier zu einer zunehmenden Umlagerung der Kräfte in die Fasern, die sich – wie später gezeigt wird – auch

rechnerisch recht gut verfolgen läßt. Mit Zfb-Kriterien kann man den Beginn der Rißbildung in den Schichten beschreiben, Degradationsmodelle erfassen die mit der fortschreitenden Rißbildung einhergehende Verminderung bestimmter Steifigkeiten und die daraus resultierende Umlagerung der Kräfte, und mit gesonderten Fb-Kriterien wird der Eintritt des Faserbruches vorhergesagt.

Abschließend muß hier die Frage der von einem Zfb des Modus C ausgehenden Keil- und Sprengwirkung noch etwas eingehender behandelt werden. Dazu sei zunächst eine einzelne, nicht in einem Laminat eingebettete UD-Schicht betrachtet. Im allgemeinen wirken auf einer schrägen, parallel zu den Fasern verlaufenden Schnittebene drei Spannungen, nämlich die Normalspannung σ_n und die beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , **Bild 2.13**. Schneidet man durch einen schrägen Schnitt unter einem Winkel θ (und einen weiteren in Dickenrichtung verlaufenden Schnitt) aus der Schicht einen Teilkörper heraus, so ist an diesem, solange noch kein Bruch eingetreten ist, zunächst das Gleichgewicht der Kräfte durch die im Werkstoff wirksamen Spannungen gewährleistet, Bild 2.13a. Dieses ist die Ausgangsbasis für die Herleitung der bekannten Transformationsbeziehungen für Spannungen. Im hier betrachteten Fall eines ebenen (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustands lauten diese:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_2 \cos^2 \theta, \\ \tau_{nt} &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{n1} &= \tau_{21} \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} ergeben zusammen eine resultierende Schubspannung

$$\tau_{n\psi} = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} = \cos \theta \sqrt{\sigma_2^2 \sin^2 \theta + \tau_{21}^2}.\tag{2.2}$$

Es soll nun der Winkel θ_{fp} ($fp \hat{=}$ fracture plane) die Lage einer Bruchebene bezeichnen, die sich bei einem bestimmten Verhältnis τ_{21}/σ_2 einstellt, Bild 2.13b.

Wenn sich die betrachtete Schicht nicht in einem Laminat befände, würden die Bruchstücke aufeinander in Richtung von $\tau_{n\psi}$ abgleiten, sobald der durch die Normalspannung σ_n verursachte Reibwiderstand überwunden werden kann, d.h. wenn gilt:

$$|\tau_{n\psi}| \geq |\mu \sigma_n|.\tag{2.3}$$

Mit den obigen Transformationsformeln und den Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen \sin , \cos und \tan wird hieraus

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{\sigma_2}\right)^2 + \left[\left(\frac{\tau_{21}}{\sigma_2}\right)^2 + 1\right] \tan^2 \theta_{fp}} \geq \mu.\tag{2.4}$$

Ist die gebrochene Schicht Bestandteil eines Laminats, so kann, wenn noch keine merklichen Delaminationen vorhanden sind, die über die horizontale Komponente der Reibkraft

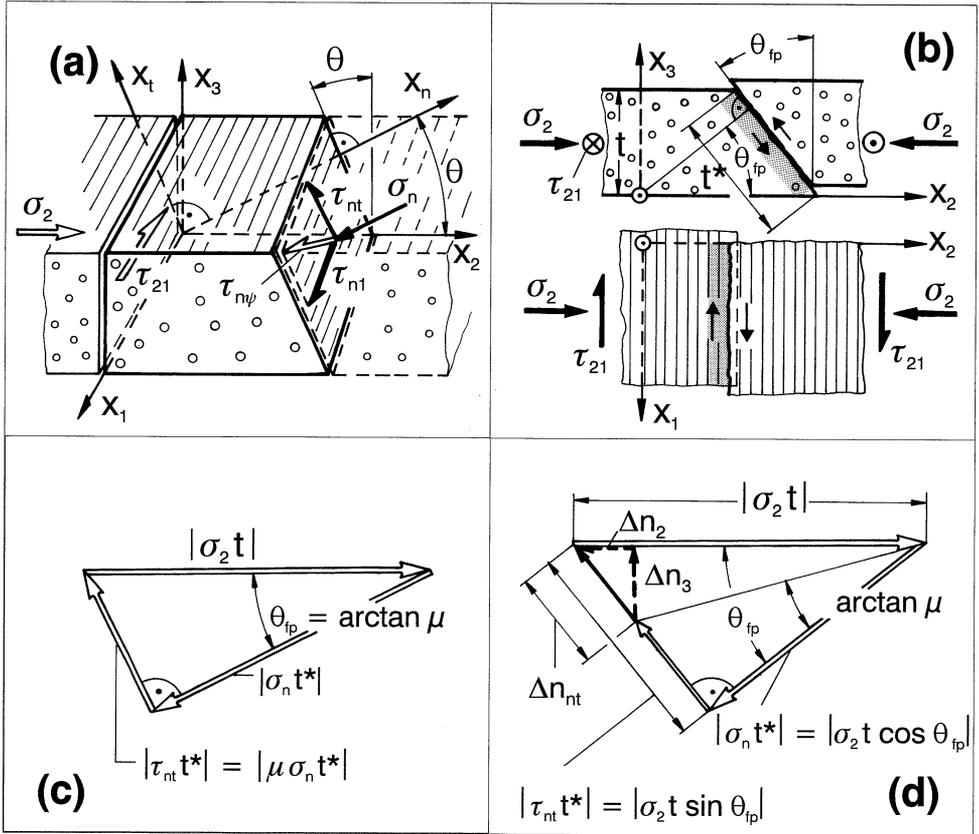


Bild 2.13: Zur Erklärung der Keilwirkung schräger Brüche des Modus C bei ebener $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung. (a) Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ : Normalspannung σ_n , die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} lassen sich zu $\tau_{n\psi}$ zusammenfassen. (b) Wenn $\tau_{n\psi} t^*$ die maximale Reibkraft $\mu \sigma_n t^*$ überschreitet, gleiten die Bruchstücke in der Richtung von $\tau_{n\psi}$ aufeinander ab. (c) Kräftegleichgewicht an einem Bruchstück bei $\tau_{21} = \tau_{n1} = 0$. Solange $\tau_{nt} t^*$ kleiner ist als die maximal mögliche Reibkraft, gleiten die Bruchstücke nicht aufeinander ab. (d) Kräfte an einem Bruchstück mit großem Bruchwinkel θ_{fp} bei $\tau_{21} = \tau_{n1} = 0$. Die maximale Reibkraft ist überschritten. Im Laminate wird die Überschusskraft Δn_2 über interlaminaren Schub τ_{32} in die Nachbarschichten eingeleitet. Δn_3 übt durch interlaminare Normalspannungen eine Sprengwirkung auf das Laminate aus.

hinausgehende Kraftwirkung der Schubspannung τ_{n1} wohl ohne weiteres durch interlamina-
ren Schub τ_{31} in der Umgebung des Risses in die Nachbarschichten umgeleitet werden, so
daß für die Untersuchung der "Sprengwirkung" die Spannungskomponente τ_{n1} und damit
 τ_{21} außer Betracht bleiben kann.

Wenn man nur die Spannungen betrachtet, die eine Kraftwirkung in Dickenrichtung
haben, Bild 2.13c und d, erhält man als Abgleitbedingung aus Gl. (2.4) mit $\tau_{21} = 0$

$$\theta_{fp} \geq \arctan \mu, \quad (2.5)$$

die der Bedingung für das Abgleiten einer Masse auf einer schiefen Ebene ähnelt.

Es wird später gezeigt, daß der Bruchwinkel θ_{fp} bei $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung sehr
einfach berechnet werden kann, Gl (5.7) auf S. 65. Nimmt man $\mu = 0,4$ an, würde nach
Gl. (2.5) bei Bruchwinkeln $\theta_{fp} \geq 22^\circ$ von einer gebrochenen Schicht in einem Laminat
eine Kraftwirkung in Richtung der Dicke ausgehen, welche die Tendenz hat, das Laminat zu
"sprengen".

Für die Herstellung des Kraftgleichgewichts auf der Bruchebene allein durch die Reibkraft
fehlt der schräg gerichtete Kraftfluß (Kraft je Breitereinheit), Bild 2.13d,

$$\Delta n_{nt} = (\tau_{nt} - \mu \sigma_n) t^*. \quad (2.6)$$

Dessen in Dickenrichtung wirkende Komponente Δn_3 ist die Ursache der "Sprengwirkung",
während die Komponente Δn_2 in der Umgebung des Risses interlamina-
re Schubspannungen τ_{32} bewirkt. Es entsteht also für die Nachbarschichten erhöhte Delaminationsgefahr
und – besonders wenn diese unter hoher faserparalleler Druckspannung stehen – die Gefahr
des Beulens einzelner Lagen, dessen unterschiedliche Formen von *Prinz* und *Gädke* in [34]
beschrieben worden sind.

Besonders gefährlich sind die schrägen Brüche, wenn die gebrochene Schicht relativ dick
ist und – was theoretisch durchaus wahrscheinlich ist – zwei schräge Brüche nahe beieinander
auftreten und der Bruchwinkel einmal einen positiven und einmal einen negativen Wert hat,
Bild 2.14.

Aus Versuchen, die am *Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV)* in Aachen durchgeführt
wurden [15], geht hervor, daß bei besonders ungünstigen Verhältnissen der schräge Zwischen-
faserbruch infolge σ_2 -Druckspannung in Sekundenbruchteilen einen schlagartigen Totalbruch
eines Laminats auslösen kann, **Bild 2.15.**

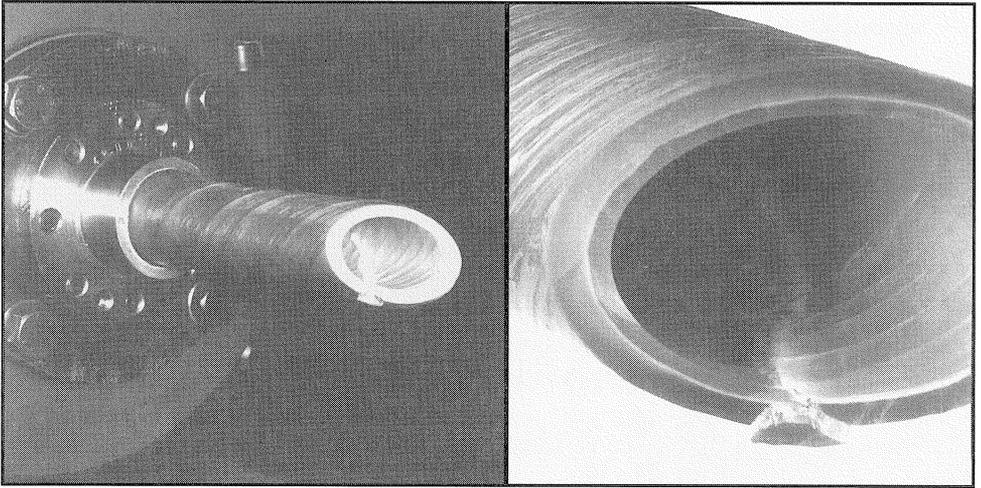


Bild 2.14: An einer schräg aufgeschnittenen GFK-Drehrohrfeder zeigen sich zwei benachbarte Brüche des Modus C mit entgegengesetztem Vorzeichen des Bruchwinkels θ_{fp} [25].

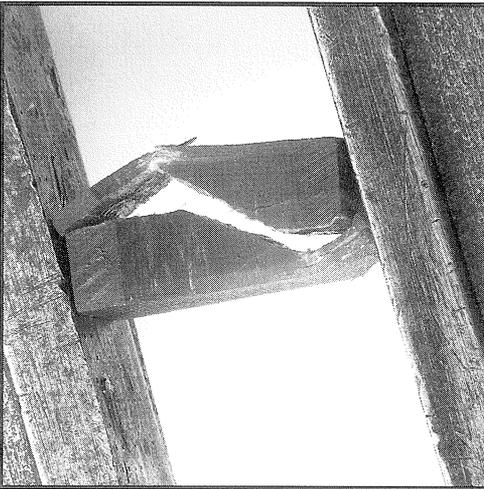


Bild 2.15: Katastrophaler Bruch eines $[\pm 30^\circ/90^\circ/\pm 30^\circ]$ -Laminats infolge eines Zfb vom Modus C in der dicken 90° -Schicht bei einachsigen Druck in 0° -Richtung [15]

3 Anmerkungen zur Spannungsanalyse

3.1 Vorbemerkungen

Die Methoden der Spannungsanalyse werden relativ kurz behandelt, weil sie weitgehend bekannt sein dürften. Die Problembereiche der schichtenweisen Bruchanalyse liegen auch am allerwenigsten bei der Spannungsanalyse als vielmehr bei den Bruchkriterien und Degradationsmodellen sowie deren sinnvoller Anwendung. Um die damit zusammenhängenden Fragen gründlicher bearbeiten zu können, wird hier auf eine eingehende Darstellung der Spannungsanalyse verzichtet, zumal sowohl auf eine VDI-Richtlinie als auch auf einschlägige Monographien verwiesen werden kann [31, 35 bis 38].

Die Netztheorie gilt heute aus wissenschaftlicher Sicht als obsolet. Für die Konstruktionspraxis bleibt sie aber ein unverzichtbares Hilfsmittel, insbesondere für den Laminat- und Bauteil-Entwurf. Dieser Aspekt wird deshalb im folgenden kurz angesprochen.

3.2 Hinweise zur Netztheorie

Etwas vereinfacht ausgedrückt unterscheidet sich die Netztheorie von der allgemein bekannten klassischen Laminattheorie dadurch, daß bei der Modellierung des Laminats als Schichtenverbund aus UD-Schichten alle Elastizitätsmoduln, Schubmoduln und Querkontraktionszahlen mit Ausnahme des faserparallelen Elastizitätsmoduls E_{\parallel} zu "null" gesetzt werden. Dementsprechend können für die einzelnen Schichten auch nur faserparallele Spannungen σ_{\parallel} (oder σ_1) errechnet werden. Statt mit Spannungen rechnet man zweckmäßigerweise mit Schichtkräften $n_{\parallel k} = \sigma_{\parallel k} t_k$. Eigentlich müßte man korrekterweise von Kräften je Breitereinheit sprechen; sie werden auch als Kraftflüsse, Normalkraftfluß, Schub(kraft)fluß, bezeichnet.

Zum Aufstellen der drei Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften am Laminat und den Kräften in den einzelnen Faserschichten transformiert man die Schichtkräfte in die Richtungen x und y , auf die die äußeren Kräfte bezogen sind. Für ein Laminat mit 3 Faserrichtungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (Winkel positiv, wenn man aus der x -Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn in die Faserrichtung gelangt) erhält man für die ebene Belastung durch

die drei Kraftflüsse n_x, n_y, n_{xy} das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} n_x &= n_{\parallel 1} \cos^2 \alpha_1 + n_{\parallel 2} \cos^2 \alpha_2 + n_{\parallel 3} \cos^2 \alpha_3, \\ n_y &= n_{\parallel 1} \sin^2 \alpha_1 + n_{\parallel 2} \sin^2 \alpha_2 + n_{\parallel 3} \sin^2 \alpha_3, \\ n_{xy} &= \frac{1}{2} n_{\parallel 1} \sin 2\alpha_1 + \frac{1}{2} n_{\parallel 2} \sin 2\alpha_2 + \frac{1}{2} n_{\parallel 3} \sin 2\alpha_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hieraus wird sogleich ersichtlich, daß bei 3 Faserrichtungen grundsätzlich jeder beliebige ebene Belastungszustand n_x, n_y, n_{xy} allein durch Faserkräfte aufgenommen werden kann, denn aus den obigen 3 Gleichungen lassen sich bei gegebenen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stets die für das Gleichgewicht erforderlichen 3 Schichtkräfte $n_{\parallel 1}, n_{\parallel 2}, n_{\parallel 3}$ errechnen. Damit ist allerdings noch nichts darüber ausgesagt, ob bei der getroffenen Winkelwahl die Belastung auch mit dem kleinstmöglichen Materialaufwand aufgenommen wird. Dies hängt von der geschickten Wahl der Faserrichtungen ab, für welche die Netztheorie bestimmte Regeln liefert [31,39].

Wird das Laminat mit nur 2 Faserrichtungen α_1 und α_2 ausgeführt, entfällt in den Gleichgewichtsbedingungen Gln. (3.1) jeweils der letzte Term mit $n_{\parallel 3}$. Die 3 Gleichungen erfordern aber, wie vorher auch, 3 "Unbekannte". Wenn die belastenden Kraftflüsse gegeben sind, können dies nur die beiden Schichtkräfte $n_{\parallel 1}$ und $n_{\parallel 2}$ sowie zusätzlich ein Faserrichtungswinkel α_1 oder α_2 sein. Durch die Wahl eines Winkels ist damit – passend zur vorliegenden Belastung – auch der andere Winkel festgelegt.

Ändert sich das Verhältnis, in dem die Kräfte n_x, n_y, n_{xy} zueinander stehen, müßte auch eine neue Winkelzuordnung erfolgen. Ein Laminat mit 2 Faserrichtungen kann nur einen ganz bestimmten Belastungszustand – nämlich denjenigen, für den die Winkelzuordnung getroffen wurde – allein durch Faserkräfte aufnehmen. Es sei an die im Abschnitt 2.5 betrachteten Beispiele für nicht beanspruchungsgerecht ausgelegte Lamine erinnert.

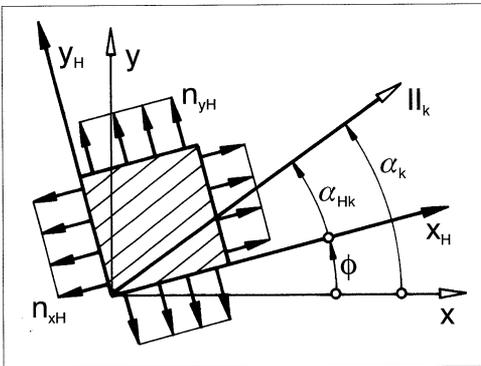


Bild 3.1: Koordinatensysteme und Winkel bei der Netztheorie

Für das Berechnen der Schichtkräfte erweist es sich als zweckmäßig, den Belastungszustand (n_x, n_y, n_{xy}) in die Richtungen der Haupt-Normalkräfte n_{xH} und n_{yH} zu transfor-

mieren (Haupt-Normalkraft-Richtung Φ analog zu Gl. (8.14) auf S. 133). Damit lauten dann die 3 Gleichgewichtsbedingungen für ein Laminat mit n Faserrichtungen, d.h. $k = 1$ bis n :

$$\begin{aligned} n_{xH} &= \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \cos^2 \alpha_{H_k}, \\ n_{yH} &= \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \sin^2 \alpha_{H_k}, \\ 0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \sin 2\alpha_{H_k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei α_{H_k} der Faserrichtungswinkel der k -ten Schicht in bezug auf die Richtung der Haupt-Normalkraft n_{xH} ist, **Bild 3.1**.

Bei einem zweischichtigen Laminat ($k = 1, 2$) folgen hieraus für die Winkelzuordnung folgende Beziehungen [39]:

$$\frac{\sin 2\alpha_{H_2}}{\sin 2\alpha_{H_1}} = -\frac{n_{\parallel 1}}{n_{\parallel 2}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\tan \alpha_{H_1} - \tan \alpha_{H_2}}{\cotan \alpha_{H_1} - \cotan \alpha_{H_2}} = \frac{n_{yH}}{n_{xH}}. \quad (3.4)$$

Die für die Winkelzuordnung bedeutsame Lösung der Gl. (3.4) lautet:

$$\tan \alpha_{H_2} = -\frac{n_{yH}}{n_{xH} \tan \alpha_{H_1}}. \quad (3.5)$$

Im Fall des ausgeglichenen Winkelverbunds mit $\alpha_{H_1} = +\omega$ und $\alpha_{H_2} = -\omega$ wird daraus

$$\tan \omega = \sqrt{\frac{n_{yH}}{n_{xH}}}. \quad (3.6)$$

Es folgen nun Beispiele dafür, daß man mit der Netztheorie mehr Informationen erhalten kann, als gemeinhin angenommen wird. Der mehr an den allgemeinen Zusammenhängen interessierte Leser möge auf S. 35 weiterlesen.

Entgegen einer weitverbreiteten Meinung ist ein torsionsbelastetes Rohr, das statt als $\pm 45^\circ$ -Rohr ($\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = -45^\circ; \alpha_{H_1} = 0^\circ, \alpha_{H_2} = -90^\circ$) ebenfalls als ausgeglichener Winkelverbund bezüglich der Axialrichtung ($\alpha_1 = +\omega; \alpha_2 = -\omega$), aber mit $\omega \neq 45^\circ$ ausgeführt wird, nach der Netztheorie tragfähig.

Mit $n_{yH}/n_{xH} = -1$ wird aus Gl. (3.4):

$$\tan \alpha_{H_1} + \cotan \alpha_{H_1} = \tan \alpha_{H_2} + \cotan \alpha_{H_2}. \quad (3.7)$$

Die Bedingung (oder auch $\tan \alpha_{H_2} = \cotan \alpha_{H_1}$ nach Gl.(3.5)) ist nach **Bild 3.2** erfüllt für

$$\alpha_{H_2} = 90^\circ - \alpha_{H_1}. \quad (3.8)$$

Wählt man $\alpha_{H_1} = -30^\circ$, wird $\alpha_{H_2} = 120^\circ$, das bedeutet $\omega = 15^\circ$;

wählt man $\alpha_{H_1} = 30^\circ$, wird $\alpha_{H_2} = 60^\circ$, das bedeutet $\omega = 75^\circ$.

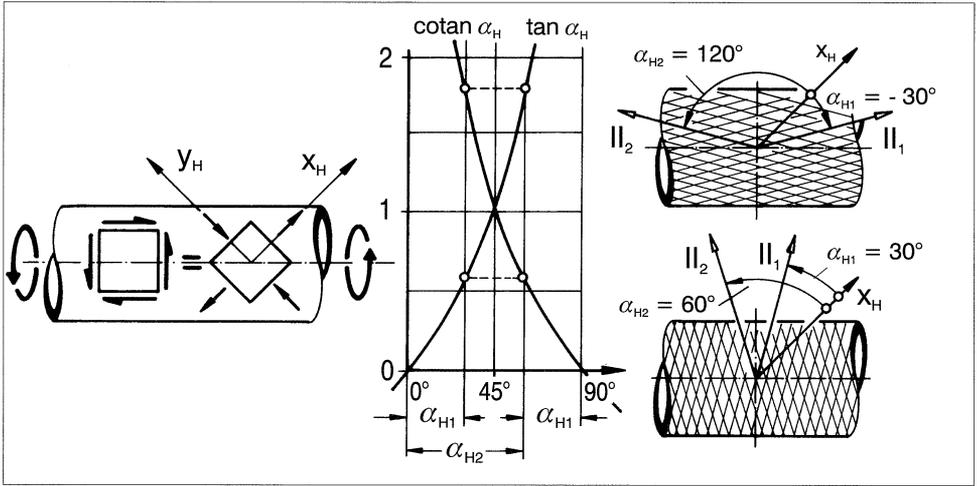


Bild 3.2: Faserorientierungen nach der Netztheorie für Torsionsrohre mit unterschiedlichen Biegesteifigkeiten

Der erforderliche Faseraufwand wäre bei beiden Ausführungen gleich hoch, jedoch doppelt so hoch wie der minimale Faseraufwand bei der "optimalen" $\pm 45^\circ$ -Ausführung. Häufig muß man aber bei der Wahl der Faserrichtungen auf zusätzliche Anforderungen Rücksicht nehmen und daher von der $\pm 45^\circ$ -Anordnung abweichen. Mit $\omega = 15^\circ$ ergibt sich eine höhere Längsbiegesteifigkeit, die z.B. bei Kardanwellen wichtig ist, weil diese eine hohe kritische Drehzahl aufweisen müssen [40]. Bei $\omega = 75^\circ$ ist die Umfangssteifigkeit erhöht.

Die Netztheorie kann keine Angaben über die Verteilung interlaminarer Schubspannungen liefern, wohl aber über die auftretende Radialspannung σ_r , die für die UD-Schichten eine interlaminare Normalspannung σ_3 darstellt. Für die Innenseite der äußeren UD-Schicht ($k = n$) der Rohrwandung gilt nach [27] (dort Gl. (6.2))

$$\sigma_r = \sigma_3 = -\frac{n_{y_n}}{r_{i_n}} = -\frac{n_{||n} \sin^2 \alpha_n}{r_{i_n}}, \tag{3.9}$$

mit r_{i_n} = Innenradius der n-ten UD-Schicht.

Wenn man gleich dicke UD-Schichten voraussetzt, ist diese interlaminare Spannung bei $\omega = 15^\circ$ etwa 7,5 mal niedriger als bei $\omega = 45^\circ$ und bei $\omega = 75^\circ$ etwa doppelt so hoch wie bei $\omega = 45^\circ$. In allen Fällen, in denen dies fertigungstechnisch und von der Beanspruchung her möglich ist, wird man selbstverständlich versuchen, an der äußeren Schicht niedrige Radialspannungen oder im Idealfall radiale Druckspannungen zu erzielen, um so der Delaminationsgefahr entgegenzuwirken. Bei reiner Wechsellast empfiehlt sich zumindest, die äußere Schicht mit einem besonders kleinen Wickelwinkel α_n auszuführen, s. Gl. (3.9).

Diese Beispiele sollten genügen, um den Wert der Netztheorie für den Bauteil- und Laminat-Entwurf ins rechte Licht zu rücken. Im Kontext dieses Buches bleibt festzuhalten, daß die Netztheorie dazu dienen kann, hochbeanspruchte Laminare beanspruchungsgerecht zu entwerfen, bei denen sich mit fortschreitender Rißbildung durch Zfb des Modus A die Kräfte mehr und mehr in das Faser-”Netzwerk” umlagern. Nur bei solchen Laminaten ist dann auch eine wirklichkeitsnahe rechnerische Simulation des sukzessiven Bruchgeschehens durch die Anwendung von Bruchkriterien und Degradationsmodellen möglich.

3.3 Probleme bei der klassischen Laminattheorie

Zur Analyse der Spannungs- und Verzerrungszustände der einzelnen Schichten der Laminare wird in erster Linie die klassische Laminat-Theorie (Classical Laminate Theorie, CLT) benutzt, mit der ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände bei Scheiben-, Schalen- und Plattenproblemen erfaßt werden können. Sie kann heutzutage als allgemein bekannt vorausgesetzt werden [31,35 bis 38]. Für ihre Anwendung bei einer wirklichkeitsnahen Bruchanalyse von Laminaten muß sie jedoch dahingehend modifiziert werden, daß die Nichtlinearität von Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhängen berücksichtigt wird, die sich insbesondere bei den (τ_{21}, γ_{21}) -Diagrammen zeigt, aber auch bei $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagrammen, wenn σ_2 eine Druckspannung ist. Bei GFK ist diese ausgeprägter als bei CFK. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, aber nicht alle sind gleich geschickt. Im allgemeinen wird zunächst folgende grundsätzliche Annahme getroffen:

Bei der Überlagerung der drei Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ bleiben die nicht-linearen Spannungs,Verzerrungs-Beziehungen dieselben wie bei alleiniger σ_1 -Beanspruchung bzw. σ_2 -Beanspruchung bzw. τ_{21} -Beanspruchung.

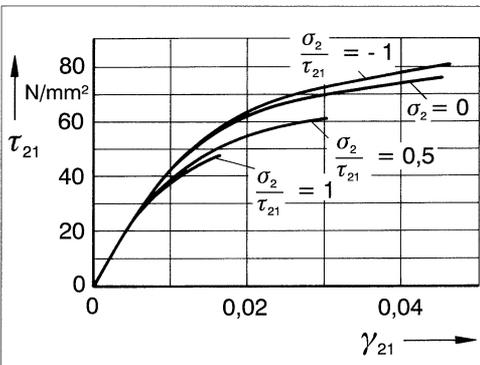


Bild 3.3: (τ_{21}, γ_{21}) -Schubspannungs, Schiebungs-Diagramme bei einer kombinierten Wirkung von τ_{21} und σ_2

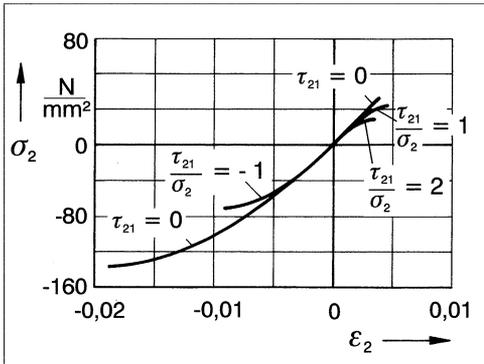


Bild 3.4: (σ_2, ϵ_2) -Spannungs, Dehnungs-Diagramme bei kombinierter Wirkung von σ_2 und τ_{21}

Ein (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramm müßte folglich unverändert bleiben, wenn sich der τ_{21} -Spannung noch eine zu τ_{21} proportionale σ_2 -Spannung überlagert. Daß dies nicht zutrifft, wurde durch die Aufnahme von Spannungs,Verzerrungs-Diagrammen bei verschiedenen kombinierten (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchungen in [41] gezeigt, **Bilder 3.3 und 3.4**. Die zusätzliche Mikroschädigung durch die σ_2 -Beanspruchung verursacht einen flacheren Verlauf der (τ_{21}, γ_{21}) -Linie als bei reiner τ_{21} -Beanspruchung und umgekehrt. Am Fachgebiet *Faserverbundtechnik* des Autors an der Universität Gh Kassel entwickelte Rechenprogramme erlauben die Berücksichtigung solcher Interaktionen der Spannungen σ_2 und τ_{21} . Dazu müssen aber einige Spannungs-Verzerrungs-Diagramme für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung vorliegen. Grundsätzlich gilt, daß man bei Vernachlässigung dieser "Verzerrungs-Interaktion" bei kombinierter $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung meist zu niedrige Rißbildungsgrenzen errechnet.

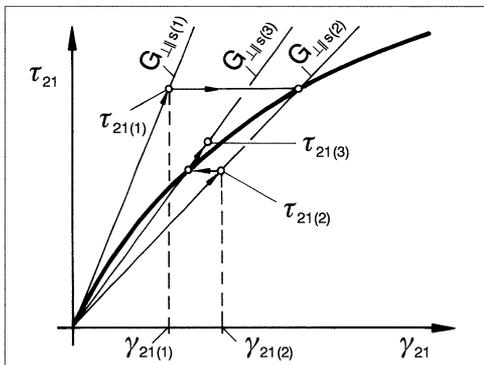


Bild 3.5: Quasi-linear-elastisches Berechnen von Spannungen τ_{21} und Schubverformungen γ_{21} durch Iteration mit Hilfe eines veränderlichen Sekantenmoduls $G_{\perp||S}$

Zum Berechnen von Spannungen σ_2 bzw. τ_{21} aufgrund experimentell ermittelter (σ_2, ϵ_2) - bzw. (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramme kann man entweder Tangentenmodul, beispielsweise $E_{\perp t} = d\sigma_2/d\epsilon_2$, oder Sekantenmodul, z.B. $E_{\perp S} = \sigma_2/\epsilon_2$, benutzen. Die Spannungs-

Verzerrungs-Zusammenhänge werden zweckmäßigerweise mit Spline-Funktionen 3. Grades angenähert, entweder im Ganzen oder abschnittsweise, und es wird iterativ gerechnet. Somit stehen sowohl die Werte des Sekantenmoduls als auch des Tangentenmoduls zur Verfügung. Beim Iterieren benötigt man bei Benutzung des Sekantenmoduls ein paar mehr Rechenschritte als beim Rechnen mit Tangentenmoduln, weil die Anpassung immer nur im Spannungswert, aber nicht mit der richtigen Steigung des Diagramms erfolgt, **Bild 3.5**. Dafür ist das Rechnen mit den Sekantenmoduln jedoch insofern vorteilhaft, als es "selbst-korrigierend" ist. Hat man bei einer Belastungssteigerung für eine Laststufe eine Spannung fehlerhaft berechnet, wirkt sich dies nicht auf den bei einer höheren Laststufe berechneten Spannungszustand aus, denn man benutzt keine früher berechneten Spannungswerte, sondern rechnet immer wieder auf einem "frischen Strahl" vom Nullpunkt aus. Die Vorzüge des Sekantenmoduls zeigen sich auch bei der Degradation nach dem Rißbildungsbeginn; für ihn läßt sich eine monotone Abklingfunktion finden.

Bei τ_{21} -Beanspruchung ist es belanglos, ob man den Sekantenmodul $G_{\perp\parallel S}$ von τ_{21} oder von γ_{21} abhängig abgreift. Hingegen kann bei nicht-linearen $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Zusammenhängen der Sekantenmodul $E_{\perp S}$ bei gleichzeitiger Wirkung von σ_1 und σ_2 nicht von der errechneten Dehnung ε_2 abhängig gemacht werden, die wegen der Querkontraktion nicht nur von σ_2 , sondern auch von σ_1 abhängt, **Bild 3.6**.

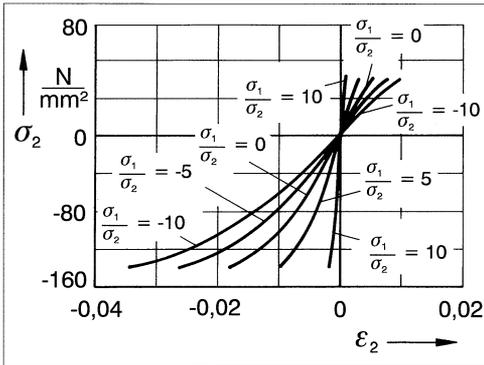


Bild 3.6: $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs, Dehnungs-Diagramme bei gleichzeitiger Wirkung von σ_2 und σ_1

Bei der Spannungs- und Verzerrungsanalyse mit der Laminattheorie tritt das Elastizitätsgesetz einer UD-Schicht in der folgenden Form auf:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\parallel\perp}E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel}E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \nu_{\parallel\perp} = \nu_{\perp\parallel} \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}. \quad (3.10)$$

Für die nicht-lineare Rechnung benutzt man weiterhin dieses Elastizitätsgesetz, d.h. man rechnet "quasi-linear-elastisch", indem man in die obigen Beziehungen spannungsabhängige Elastizitätsgrößen einführt.

Während der (τ_{21}, γ_{21}) -Zusammenhang vom übrigen Stoffgesetz entkoppelt ist, hängen σ_1 und σ_2 von beiden Dehnungen, ε_1 und ε_2 , ab. Man macht deshalb den Sekantenmodul $E_{\perp S}$ vom erreichten σ_2 -Wert abhängig, und zwar folgendermaßen [2]:

Wenn bei zweiachsiger (σ_1, σ_2) -Beanspruchung ein σ_2 -Wert errechnet worden ist, wird dem vorliegenden Spannungszustand ein Wert des Sekantenmoduls $E_{\perp S}$ zugeordnet, der sich beim gleichen σ_2 -Wert aus dem $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm für einachsige σ_{\perp} -Beanspruchung ergibt. Der so ermittelte $E_{\perp S}$ -Wert tritt im Elastizitätsgesetz (3.10) überall an die Stelle von E_{\perp} .

Diese Verfahrensweise erscheint deshalb berechtigt, weil die Krümmung des $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramms bei der Erstbelastung im wesentlichen auf Mikrorißbildung zurückgeführt werden kann [41]. Deren Ausmaß dürfte von der erreichten Spannungshöhe abhängen, aber nicht von der erreichten Dehnung. Hohe, schädigend wirkende σ_2 -Zugspannungen können auch bei $\varepsilon_2 = 0$ und sogar bei $\varepsilon_2 < 0$ auftreten. Dies ist übrigens auch der Grund dafür, daß es nicht möglich ist, für den Zwischenfaserbruch einfache Dehnungs-Bruchkriterien anzuwenden [42], vgl. Abschnitt 4.3.

Konsequenterweise sollte wegen der mit der Höhe der σ_2 -Spannung einhergehenden Mikroschädigung auch die Querkontraktionszahl $\nu_{\perp\parallel}$ im Verhältnis $E_{\perp S}/E_{\perp}$ abgesenkt werden. (Dies ergibt sich aus Überlegungen, die im Abschnitt 6.2.1 näher ausgeführt werden.)

Wenn bei CFK das progressiv ansteigende $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ -Diagramm berücksichtigt werden soll, verfährt man vollkommen analog.

Auch beim Erfassen des Einflusses von Eigenspannungen auf das Bruchgeschehen sollte die Nichtlinearität der Spannungs,Verzerrungs-Beziehungen berücksichtigt werden. Eigenspannungen können korrekterweise nicht – wie in den meisten kommerziellen Rechenprogrammen – vorab berechnet werden und dann als fester Sockelbetrag den Spannungen aus der Belastung zugeschlagen werden. Die Eigenspannungen verringern sich mit steigender Belastung, was man sich mit Hilfe des im folgenden beschriebenen Gedankenexperiments vergegenwärtigen kann. Eine relativ dünne, ausgehärtete UD-Schicht erhält durch eine mechanische Vorrichtung, z.B. einen Schubrahmen, eine Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ ($r \hat{=}$ residual) aufgezungen. Diese wird aufrechterhalten, während die Schicht beidseitig mit weiteren, ebenfalls ausgehärteten UD-Schichten mit unterschiedlicher Faserrichtung beklebt wird, so daß ein Laminat entsteht. Diese nachträglich angebrachten Schichten seien sehr viel steifer als die vorverformte. Dann bleibt nach Entfernung der mechanischen Verspanneinrichtung die Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ und damit die Spannung $\tau_{210}^{(r)}$ nahezu unverändert erhalten.

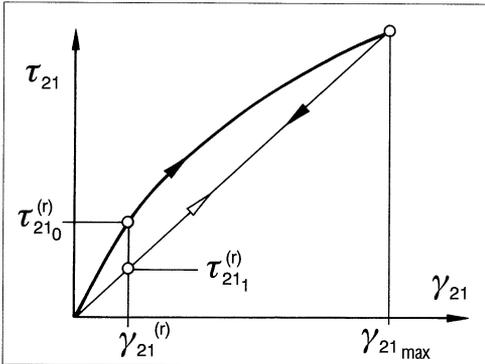


Bild 3.7: Verminderung einer Eigenspannung $\tau_{21}^{(r)}$ infolge von Mikroschädigung bei einem Belastungszyklus

Nun wird das ganze Laminat belastet und zwar so, daß in der betrachteten Schicht eine weitere Schubverformung auftritt, die in den nicht-linearen Bereich des (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramms führt, **Bild 3.7**. Bei Erreichen der Schubverformung γ_{21max} wird die Belastung wieder erniedrigt, bis das Laminat vollständig entlastet ist. Wir nehmen an, daß nur in der betrachteten Schicht Mikroschäden aufgetreten sind, die übrigen Schichten sich aber ideal elastisch verhalten. Dann wird bei vollständig entlastetem Laminat in der betrachteten Schicht wieder die anfängliche Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ erreicht, jetzt aber bei einer Schubspannung $\tau_{211}^{(r)}$, die erheblich niedriger ist als die vor der Belastung vorhandene Spannung $\tau_{210}^{(r)}$. Die während des Belastungsvorgang aufgetretenen Mikroschädigungen haben also einen Teil der ursprünglichen Eigenspannung $\tau_{210}^{(r)}$ "abgebaut". Die Eigenspannung war auch schon bei der Höchstlast auf den niedrigen Wert $\tau_{211}^{(r)}$ abgefallen. Dies folgt daraus, daß bei der erneuten – jetzt ideal elastischen – Belastung bis γ_{21max} der Betrag der Eigenspannung $\tau_{211}^{(r)}$ unveränderlich ist; sie war also auch schon am Ende der Erstbelastung in der gleichen Größe vorhanden.

Als Konsequenz folgt aus dem Gedankenexperiment, daß Eigenspannungen bei nicht-linearer Rechnung korrekterweise bei jeder Iteration mit den jeweils benutzten Sekantenmoduln neu berechnet werden müßten.

Generell ist festzuhalten, daß alle Fehler, die bei Benutzung der heute gängigen Rechenprogramme gemacht werden, nämlich durch Vernachlässigung der Nichtlinearität der Spannungs,Verzerrungs-Zusammenhänge, der "Verzerrungs-Interaktion" und des "mechanischen" Abbaus der Eigenspannungen, sich meistens in der gleichen Richtung auswirken. Alle führen normalerweise dazu, daß zu niedrige Zf-Rißbildungsgrenzen errechnet werden. Deshalb ist es durchaus denkbar, daß einige Abweichung zwischen Rechnung und Experiment, die von manchen Autoren dem "dünne Schicht" - und "in situ"-Effekt (Abschnitt 11.2) zugeschrieben wird, in Wirklichkeit – zumindest teilweise – von einer Summation von Fehlern bei der Spannungsanalyse herrührt.

3.4 Anmerkungen zu interlaminaren Spannungen

Außer in eng begrenzten Krafterleitungsbereichen und an freien Laminaträndern, d.h. Rändern, an denen keine äußeren Kräfte angreifen (z.B. seitlichen Rändern von Flachprobekörpern) sowie bei Schlagbeanspruchungen, treten meist keine für das Bruchgeschehen bedeutenden interlaminaren Spannungen auf. Beim Arbeiten mit der klassischen Laminattheorie werden die interlaminaren Spannungen normalerweise überhaupt nicht erfaßt. So erklärt es sich, daß Konstrukteure und "Berechner" meist keine Erfahrungen mit interlaminaren Spannungen sammeln können. Weil sich diese Spannungen auch weitgehend einer gefühlsmäßigen Beurteilung entziehen, entwickeln sich häufig recht falsche Vorstellungen über sie. Bereits der Name verführt zu der Fehlinterpretation, daß es sich um Spannungen handelt, die nur zwischen den Schichten auftreten. Aus Gleichgewichtsgründen müssen sie aber auch in den Schichten selbst wirken, nur erreichen sie an den Schichtgrenzen oft ihre Extremwerte, s. Bild 3.9 auf S. 42. Auch die Aussage, daß eine gedachte, meist auch real vorhandene dünne "Zwischenschicht" aus Matrixmaterial unterschiedliche interlaminare Schubspannungen in den Grenzflächen zweier benachbarter Schichten "ausgleicht" [43], verstößt gegen die Gleichgewichtsbedingungen, denn ein Volumenelement mit infinitesimal kleiner Dicke dz nach **Bild 3.8a**, das Teile von zwei Schichten und eine Zwischenschicht enthält, kann auf seiner Ober- und Unterseite und damit auch in den beiden Grenzflächen nur gleich große Spannungen $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ aufweisen.¹

Dort, wo der intralaminare Spannungszustand einer Schicht homogen ist, d.h. sich über größere Bereiche nicht ändert, können aus Gleichgewichtsgründen keine interlaminaren Schubspannungen entstehen. Dies geht aus **Bild 3.8b** hervor. Der Übersichtlichkeit halber sind nur diejenigen Spannungen eingezeichnet worden, die eine Kraftwirkung in x -Richtung ausüben. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte in x -Richtung folgt:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx(dydz) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy(dx dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz(dx dy) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right). \quad (3.12)$$

Die Spannungen $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ auf Vorder- und Rückseite bzw. Ober- und Unterseite des Elements stehen unter sich im Gleichgewicht. Für die Entstehung einer interlaminaren Schubspannung τ_{zx} ist erforderlich, daß Spannungsgradienten $(\partial \sigma_x / \partial x), (\partial \tau_{yx} / \partial y)$ auftreten. Eine "landläufige" Meinung, daß hohe interlaminare Spannungen zwischen Schichten wirken, in denen sehr unterschiedliche Spannungen herrschen, trifft nicht zu!

¹Auch gelegentlich bei Flachprobekörpern an den freien Rändern zwischen den Schichten eingefügte schubweiche Elastomer-Streifen können keine unterschiedlichen interlaminaren Spannungen "ausgleichen", sondern nur interlaminare Spannungen mildern, indem sie im Bereich des freien Randes gewisse Relativverschiebungen der Einzelschichten ermöglichen, die normalerweise durch eine starre Verklebung verhindert sind.

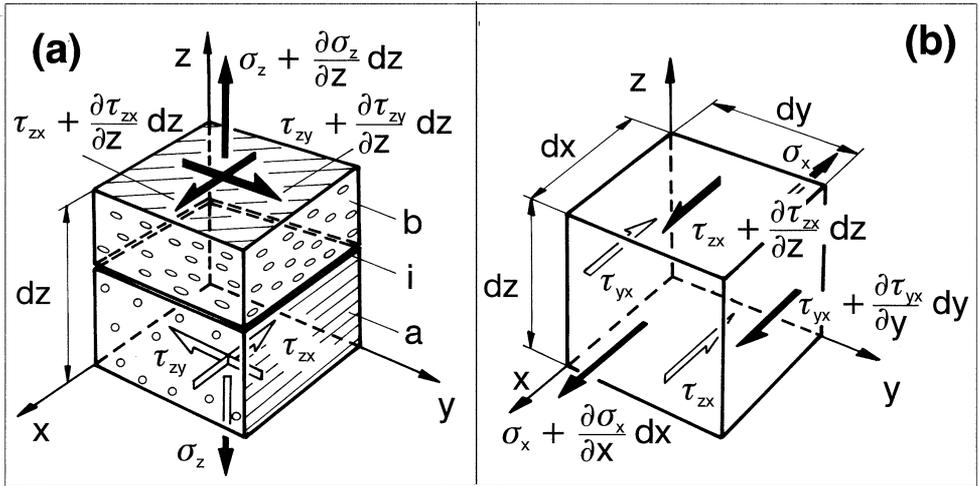


Bild 3.8: Spannungen und Spannungsänderungen an einem infinitesimalen Volumenelement. (a) Da die Gradienten der interlaminaren Spannungen in Dickenrichtung z endlich sind, können die interlaminaren Spannungen $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ nicht durch eine dünne Matrix-Zwischenschicht i zwischen zwei UD-Schichten a und b "ausgeglichen" werden. (b) Spannungen und Spannungszuwächse mit Kraftwirkung in x -Richtung

Aus der Gl. (3.12) und der folgenden analogen Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right), \quad (3.13)$$

erhält man nur die Größe der Gradienten in z -Richtung der interlaminaren Spannungen τ_{zx} und τ_{zy} in einem Punkt (x, y, z) des Laminats. Ihre Größe an der Stelle z_1 folgt dann aus:

$$\tau_{zx}(z_1) = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dz, \quad (3.14)$$

$$\tau_{zy}(z_1) = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz. \quad (3.15)$$

Bei der Integration geht man zweckmäßigerweise von einer schubspannungsfreien Oberfläche (Stelle z_0) aus, z.B. bei einem Rohr von der Innenseite oder Außenseite. *Jakobi* hat eine exakte elastizitätstheoretische Berechnung interlaminarer Schubspannungen an einem gewickelten $[\pm 45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]$ -Rohr unter Querkraftbiegung [44] einer näherungsweise Berechnung [45] gegenübergestellt. Das Ergebnis ist in **Bild 3.9** dargestellt.

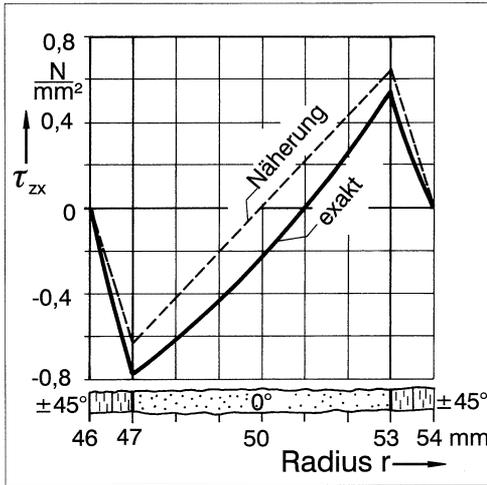


Bild 3.9: Interlaminare Schubspannungen τ_{zx} über dem Radius eines kreiszylindrischen Rohres mit $[\pm 45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]$ -Wandaufbau bei Beanspruchung als Kragträger mit Einzellast am freien Ende. Die durchgezogenen Linien zeigen die exakte Lösung nach [44], die gestrichelten Linien die Näherung nach [45].

Bei der exakten Lösung sind die intralaminaren Schichtspannungen von der z -Koordinate abhängig, bei der Näherung nicht. Deshalb ist die Steigung der über dem Radius aufgetragenen interlaminaren Schubspannung τ_{zx} bei der Näherung abschnittsweise konstant, nicht jedoch bei der exakten Lösung. Wichtig ist hier, daß die maximalen interlaminaren Schubspannungen an den Schichtgrenzen, absolut gesehen, sehr klein sind, unter 1 N/mm^2 , während in der 0° -Schicht die intralaminare Schichtspannung $\sigma_x = \sigma_1 \approx 300 \text{ N/mm}^2$ beträgt. Sie wächst auf einer Länge von 500 mm (von der Krafteinleitung am freien Ende bis zur Einspannstelle) auf diese Werte an; d.h. der Spannungsgradient ($\partial\sigma_x/\partial x$) ist sehr klein. Der Gradient ($\partial\tau_{zx}/\partial z$) ist ebenso klein², und der Integrationsweg über die Schichtdicke beträgt nur maximal etwa 6 mm statt 500 mm bei der intralaminaren Spannung σ_x . Deshalb bleibt τ_{zx} so klein. Die Abmessungen des als Beispiel gewählten Rohres (Durchmesser 100 mm, Wanddicke 8 mm, Länge 500 mm) erlauben es, dieses als dünnwandig und schlank einzustufen. In [45] wurden auch dickwandigere und gedrungene Rohre mit verschiedenen Laminataufbauten untersucht; für alle konnte aber folgende generelle Aussage gemacht werden:

”Die Beanspruchungen durch interlaminare Schubspannungen sind bei allen Laminattypen sehr klein und ohne maßgeblichen Einfluß auf die errechnete Bruchgefahr.”

Eine gänzlich andere Situation existiert an den freien Rändern eines Laminats, die man sich sehr leicht an einem streifenförmigen Probekörper aus einem $(0^\circ, 90^\circ)$ - oder einem $\pm\omega$ -Laminat vergegenwärtigen kann, **Bild 3.10**.

²s. Gl. (3.12). Die Beträge von $\partial\sigma_x/\partial x$ und $\partial\tau_{yx}/\partial y$ heben sich sogar teilweise gegenseitig auf.

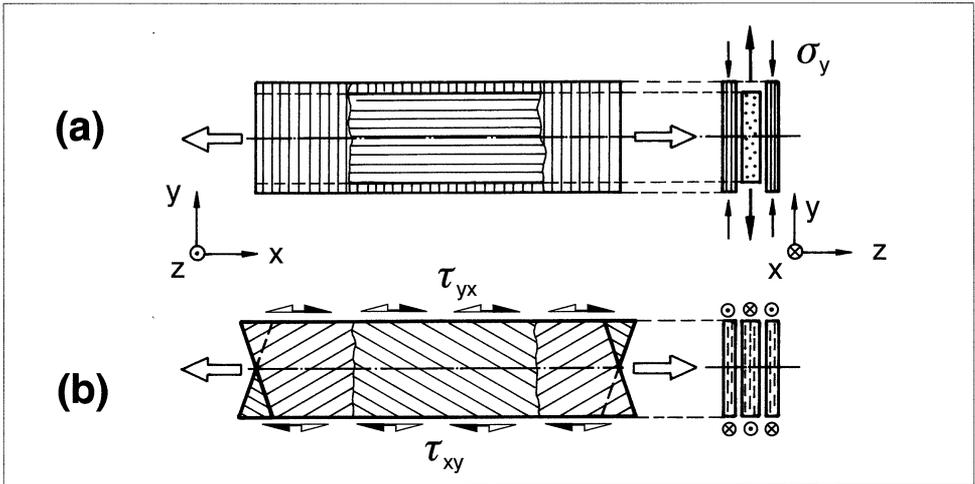


Bild 3.10: Verspannungen infolge unterschiedlichen Spannungs-, Verformungs-Verhaltens der UD-Schichten beim $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat (a) und $\pm\omega$ -Laminat (b) sind die Ursache für interlaminare Spannungen an den kraftfreien seitlichen Rändern. Gezeigt sind die unverträglichen Verformungen, die sich einstellen, wenn die Schichten nicht verbunden sind, und die zu ihrer Rückstellung erforderlichen Spannungen σ_y bzw. τ_{yx} .

Nach der Laminattheorie errechnen sich für das $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat Spannungen σ_y in der Breitenrichtung. Am kraftfreien Rand können diese aber nicht existieren; sie müssen erst durch interlaminare Schubspannungen τ_{zy} in die Schichten eingeleitet werden. Bei dem $\pm\omega$ -Laminat ergeben sich zwar keine Spannungen σ_y , statt dessen aber in den $+\omega$ -Schichten und $-\omega$ -Schichten entgegengesetzt gerichtete Schubspannungen τ_{yx} . Die Ursache für die Verspannung der Schichten liegt darin, daß sich beim $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat die unterschiedlich großen Querkontraktionen ($-\nu_{\perp\parallel}\varepsilon_x$ und $-\nu_{\parallel\perp}\varepsilon_x$) der 0° -Schicht bzw. 90° -Schicht nicht frei ausbilden können, während beim $\pm\omega$ -Laminat die mit der Dehnung in x -Richtung gekoppelte Schubverformung γ_{xy} , die für die $+\omega$ -Schicht und die $-\omega$ -Schicht unterschiedlich gerichtet ist, im Laminat unterdrückt wird, Bild 3.10. Durch interlaminare Schubspannungen τ_{zx} zwischen den Schichten belasten sich die Schichten gegenseitig mit einer Schubspannung τ_{yx} , welche die durch σ_x verursachte Schubverformung γ_{xy} kompensiert. Für die interlaminaren Schubspannungen des $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat gilt nach Gl. (3.15):

$$\tau_{zy} = - \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz, \quad (3.16)$$

und für das $\pm\omega$ -Laminat nach Gl. (3.14):

$$\tau_{zx} = - \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\tau_{yx}}{\partial y} dz. \quad (3.17)$$

Gleichzeitig entstehen zur Herstellung des Momenten-Gleichgewichts an den Einzelschichten interlaminare Zug- oder Druckspannungen σ_z , die als Zugspannungen ("Schälspannungen") eine Delamination vom Rand her sehr begünstigen.

Es sind in den letzten 25 Jahren sehr viele Arbeiten zur Berechnung der Verteilung der intra- und interlaminaren Spannungen am freien Rand erschienen. Exemplarisch werden hier nur fünf Arbeiten genannt [46 bis 50], die sich nicht nur mit der Spannungsberechnung befassen, sondern auch mit der in diesem Buch besonders interessierenden Frage der Delaminationsgefahr. Hervorzuheben ist, daß weitgehende Übereinstimmung darüber herrscht, daß die interlaminaren Spannungen in einer Entfernung vom freien Rand, die etwa gleich der Laminatdicke ist, abgeklungen sind. Das heißt auch, daß in diesem relativ kleinen Abstand vom freien Rand die aus der Laminattheorie folgenden intralaminaren Spannungen σ_y bzw. τ_{yx} voll aufgebaut sind. In dem schmalen Randbereich gibt es also sehr hohe Gradienten ($\partial\sigma_y/\partial y$) und ($\partial\tau_{yx}/\partial y$).

Ähnlich hohe Gradienten von intralaminaren Spannungen treten in ungestörten Laminatbereichen nur auf, wenn Zwischenfaserbrüche entstanden sind, s. auch Bild 2.6 auf S. 20. Hierauf wird in Abschnitt 7.2 eingegangen.

3.5 Hinweise auf analytische Lösungen

Meistens wird heute auch die Spannungsanalyse von Bauteilen mit einfacher Geometrie wie z.B. von dickwandigen kreiszylindrischen Rohren mit Hilfe der FEM ausgeführt, obwohl seit einigen Jahren analytische Lösungen verfügbar sind. Diese sind für Parameterstudien und Optimierungsprozeduren viel besser geeignet als die FEM. *Jacobi* [44] hat 1987 Lösungen für intra- und interlaminare Spannungen in dickwandigen Rohren für die folgenden Beanspruchungen erarbeitet: Innen- und Außendruck, Axialkraft, Torsion, querkraftfreie Biegung und Biegung mit konstanter Querkraft. Auch die hygrothermischen Beanspruchungen können unter bestimmten Voraussetzungen analytisch erfaßt werden. Mit dieser Methode läßt sich z.B. die Zfb-Anstrengung bei dickwandigen Rohren über der Wanddicke durch Wickelwinkelvariation konstant halten [19,20,27,44].

Für die Spannungsverteilung in einer sogenannten überlappenden Welle/Nabe-Verbindung dickwandiger Torsionsrohre hat *Schreiber* [27] ebenfalls 1987 analytische Lösungen erarbeitet, aus denen sich wichtige Hinweise für die Gestaltung und Dimensionierung leistungsfähiger und kostengünstiger Krafteinleitungen ergeben. Sie vermitteln erheblich mehr Einsichten in die Zusammenhänge als numerische Methoden.

4 Allgemeine Betrachtungen über Bruchkriterien

4.1 Begriffe und Definitionen

Der in diesem Kapitel zu erörternde Fragenkomplex ist schon von der Sache her schwierig genug, aber leider wird die Auseinandersetzung mit der Materie noch zusätzlich dadurch erschwert, daß die benötigten Begriffe in der Literatur teilweise mit unterschiedlicher Bedeutung benutzt werden, oder daß der normale Wortsinn und die technisch-wissenschaftliche Definition eines Terminus technicus gelegentlich erheblich voneinander abweichen. Dies trifft bereits auf den zentralen Begriff "Bruchkriterium" zu. Die Bezeichnung Kriterium ist eigentlich nur für ein unterscheidendes Merkmal angebracht. Deshalb wird er in diesem Buch von nun an auch nur noch dann benutzt, wenn eine Formulierung der folgenden Art gemeint ist:

$$F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) \leq 1. \quad (4.1)$$

Dieses **Bruchkriterium** unterscheidet zusammengesetzte Spannungszustände (σ, τ) , die vom Werkstoff aufgrund seiner Festigkeiten (R_σ, R_τ) ohne Bruch ertragen werden können (in diesem Fall gilt das $<$ -Zeichen), von solchen, die nicht erreichbar sind, weil vorher Bruch eintritt (es gilt das $>$ -Zeichen). Wenn Werte für die Spannungen, welche in die links vom Gleichheitszeichen stehende Funktion eingesetzt werden, dazu führen, daß der Zahlenwert der Funktion "1" wird (d.h., daß in der obigen Beziehung das Gleichheitszeichen gilt), handelt es sich um einen Spannungszustand, der einen Bruch bewirkt (oder auch – je nach Betrachtungsweise – gerade noch ohne Bruch ertragen werden kann). Das Gleichheitszeichen markiert also einen Grenzzustand, und zwar denjenigen, bei dem der Bruch eintreten kann.

Zur Unterscheidung von der Formulierung nach (4.1), die ein Bruchkriterium darstellt, wird von einer Bruchgrenzbedingung [51] oder in diesem Buch – der Kürze wegen – von einer **Bruchbedingung** gesprochen, wenn eine Formulierung der folgenden Art gemeint ist:

$$F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.2)$$

Der links vom Gleichheitszeichen stehende mathematische Ausdruck ist eine Funktion, die alle zum Bruch führenden Spannungszustände beschreibt. Man könnte sie des-

halb als die "alle Bruchzustände charakterisierende Funktion" oder "Bruchzustandefunktion" bezeichnen. Der Kürze halber wird sie im folgenden die **Bruchfunktion** genannt. Sie enthält die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ , sofern diese Einfluß auf die Bruchentstehung haben. Beim allgemeinen Spannungszustand einer UD-Schicht können dies $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ sein. Als Werkstoffparameter erscheinen in den verschiedenen Bruchbedingungen meistens mehrere Zug- und Druckfestigkeiten R_σ sowie Schubfestigkeiten R_τ ; z.B. bei einer UD-Schicht die zu den Beanspruchungen nach Bild 1.2 gehörenden Festigkeiten $R_{\parallel}^{(+)}, R_{\parallel}^{(-)}, R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\perp}, R_{\perp\parallel}$.

Bei der Wahl der Bruchfunktion gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wird sie lediglich unter dem Gesichtspunkt einfacher Handhabbarkeit und guter Anpaßbarkeit an Versuchsergebnisse gewählt, oder die Formulierung basiert – mehr oder weniger ausgeprägt – auf einer physikalischen Vorstellung von den Vorgängen, die den Bruch bewirken. Eine physikalisch plausible Annahme über die den Bruch verursachenden Zustände und Vorgänge nennt man eine **Bruchhypothese** und denkt dabei zunächst an ihre verbale Formulierung. Zur Unterscheidung davon sollte ihre spezielle mathematische Ausprägung als Bruchkriterium bzw. Bruchbedingung bezeichnet werden und nicht als Bruchhypothese, wie es in der älteren Literatur häufig anzutreffen ist.

Beim Dimensionieren von Bauteilen und beim anschließenden "Sicherheits"-Nachweis werden Bruchbedingungen dazu benutzt, rechnerisch festzustellen, wie weit die auftretenden Spannungszustände noch vom Bruchzustand entfernt sind. Dabei muß meistens vorausgesetzt werden, daß sowohl beim herrschenden Spannungszustand als auch bei dem zum Bruch führenden erhöhten Spannungszustand die einzelnen Spannungen untereinander im gleichen festen Verhältnis stehen. Der gemeinsame **positive** Faktor, mit dem unter dieser Voraussetzung alle herrschenden Spannungen erhöht werden müßten, damit die Bruchbedingung erfüllt wäre, d.h. damit die Spannungen zum Bruch führen würden, wird **Reservefaktor** f_{Res} genannt. Wenn sich $f_{Res} = 1$ errechnet, bedeutet dies, daß bereits der herrschende Spannungszustand gerade zum Bruch führt. Deshalb kann man jede Bruchbedingung alternativ zu (4.2) auch folgendermaßen schreiben:

$$f_{Res}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.3)$$

Bisher ist noch vorausgesetzt worden, daß im Werkstoff keine Eigenspannungen vorhanden sind, d.h., daß, solange keine äußere Belastung wirkt, auch keine Spannungen existieren. Nur unter dieser Voraussetzung ist der Kehrwert des Reservefaktors der Ausnutzungsgrad oder die Material-Anstrengung oder kurz **Anstrengung** (Efficiency ratio oder Effort, \mathcal{E})¹

$$\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = \frac{1}{f_{Res}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)}. \quad (4.4)$$

¹Die Anstrengung wird mit \mathcal{E} bezeichnet, um einer Verwechslung mit dem E-Modul E vorzubeugen.

Damit kann eine Bruchbedingung auch folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.5)$$

Ein Blick auf (4.2), (4.3), (4.5) zeigt, daß für die gleiche Bruchbedingung verschiedene Bruchfunktionen benutzt werden können. So sind z.B. die Bruchfunktion $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ in (4.2) und die Bruchfunktion $\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ in (4.5) nur in Ausnahmefällen identisch.

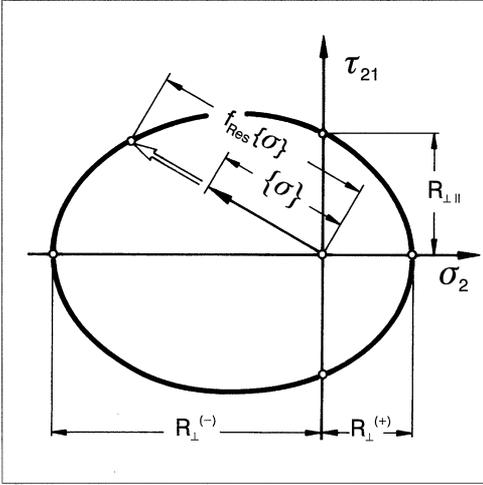


Bild 4.1: Darstellung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve als "verschobene" Ellipse nach Gl. (4.6) und Veranschaulichung des Reservefaktors f_{Res}

Meistens enthält die Bruchfunktion F Spannungen in unterschiedlicher Potenz, z.B. wurde für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung von vielen Autoren, u.a. von *Hoffmann* in [52], die Bruchbedingung folgendermaßen angesetzt, **Bild 4.1**:

$$F = \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp||}} \right)^2 = 1. \quad (4.6)$$

In dieser Formulierung sind die darin vorkommenden Spannungen – im vorliegenden Fall σ_2 und τ_{21} – diejenigen, die zum Bruch führen. Sie werden zur Kennzeichnung dieses Sachverhalts nicht durch einen Index oder anderweitig markiert!

Leider ist es üblich, auch Spannungen, die nicht zum Bruch führen, sondern erst mit dem Reservefaktor f_{Res} erhöht werden müssen, damit die Bruchbedingung erfüllt wird, genau so zu bezeichnen. Man schreibt also auch

$$\frac{(f_{Res}\sigma_2)^2}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) f_{Res}\sigma_2 + \left(\frac{f_{Res}\tau_{21}}{R_{\perp||}} \right)^2 = 1 \quad (4.7)$$

und meint nun mit σ_2 und τ_{21} die herrschenden Spannungen, die normalerweise nicht gleichzeitig die zum Bruch führenden Spannungen sind, weil im allgemeinen Fall nicht zu erwarten ist, daß sich gerade $f_{Res} = 1$ ergibt.

Auch in diesem Buch wird – wie allgemein üblich – keine Indizierung zum Unterscheiden von Spannungen nach Gl. (4.6) und Gl. (4.7) vorgenommen.

Hier ist erhöhte Aufmerksamkeit geboten, wenn man nicht unterschiedliche Symbole für zum Bruch führende und herrschende Spannungen einführen will!

Mit den gegebenen herrschenden Spannungen σ_2, τ_{21} und Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}$ stellt Gl. (4.7) eine quadratische Gleichung für den Reservefaktor f_{Res} dar. Als Kehrwert von deren Lösung erhält man die Anstrengung \mathcal{E} .

Sehr häufig kommen in den Bruchfunktionen wie z.B. in Gl. (4.6) nur Spannungsterme 1. und 2. Ordnung vor. Bezeichnet man die Summe der Terme 1. Ordnung mit $\sum L$ und die Summe der Terme 2. Ordnung mit $\sum Q$, so schreibt sich die Bruchbedingung mit der ursprünglichen Bruchfunktion und den zum Bruch führenden Spannungen

$$F = \sum Q + \sum L = 1,$$

mit dem Reservefaktor und den noch nicht zum Bruch führenden Spannungen

$$f_{Res}^2 \sum Q + f_{Res} \sum L - 1 = 0$$

oder alternativ mit der Anstrengung \mathcal{E} (nach Division durch f_{Res}^2 und Vorzeichenumkehr)

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E} \sum L - \sum Q = 0.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen für f_{Res} bzw. \mathcal{E} sind:

$$f_{Res} = \frac{1}{2\sum Q} \left(-\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + 4\sum Q} \right), \quad (4.8)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{f_{Res}} = \frac{1}{2} \left(\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + 4\sum Q} \right). \quad (4.9)$$

Definitionsgemäß sind f_{Res} und \mathcal{E} stets positiv! Setzt man nun $f_{Res} = 1$ oder $\mathcal{E} = 1$, hat man damit eine neue Schreibweise der Bruchbedingungen gefunden. Nun sind die Spannungen in Gln. (4.8) und (4.9) die zum Bruch führenden!

Eine häufige Fehlerquelle ist die irrige Annahme, daß sich in jedem Falle durch Einsetzen der herrschenden Spannungen in die Bruchfunktion ein Zahlenwert errechnen würde, der die Anstrengung angibt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Bruchfunktion bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist.²

²Die Bruchfunktion ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad r , wenn man bei Vergrößerung aller Spannungen mit dem Faktor λ aus der Bruchfunktion den Faktor λ^r ausklammern kann.

Wenn man für eine einfache Beispielrechnung auf der Basis von Gl. (4.6) $\sigma_2 = \tau_{21} = 0,25R_{\perp}^{(+)}$ sowie $R_{\perp}^{(+)} = R_{\perp\parallel} = 0,5R_{\perp}^{(-)}$ wählt, ergibt sich mit Gl. (4.9) für die Anstrengung $\mathcal{E} = 0,375$. Setzt man jedoch fälschlicherweise die herrschenden Spannungen in die Bruchfunktion auf der linken Seite von Gl. (4.6) ein, so erhält man $F = \sum Q + \sum L = 0,22$.

Mißdeutet man den F-Wert als Anstrengung, wird die Anstrengung um 41% unterschätzt!

Der mit den Werten für die herrschenden Spannungen errechnete Zahlenwert der Bruchfunktion sagt, wenn diese bezüglich der Spannungen nicht homogen vom Grad 1 ist, nichts über die Höhe der Anstrengung, sondern nur darüber etwas aus, ob die herrschenden Spannungen ohne Bruch ertragen werden (Zahlenwert < 1) oder nicht ertragen werden können (Zahlenwert ≥ 1). Leider wird der Mißdeutung dieses Zahlenwertes als Anstrengung dadurch Vorschub geleistet, daß er gelegentlich bei der Benutzung von Rechenprogrammen als "Failure Index" (FI) ausgegeben wird [53], während andere Autoren, z.B. in [5], mit "Failure Index" die Anstrengung bezeichnen.

4.2 Visualisierung und mathematische Aspekte

Für das Verständnis der teilweise ziemlich abstrakten mathematischen Behandlung der Bruchgrenzen von Werkstoffen ist es hilfreich, gewisse Visualisierungsmöglichkeiten durch die Darstellung von Bruchbedingungen als Fläche oder Körper in Spannungsräumen zu nutzen. Ausgangspunkt der Betrachtung sind in jedem Fall Spannungszustände, die aus mehreren Spannungen zusammengesetzt sind. Es wird dann die Frage gestellt, welche Grenzen (Bruch-Grenzen) der Höhe der Spannungszustände gesetzt sind.

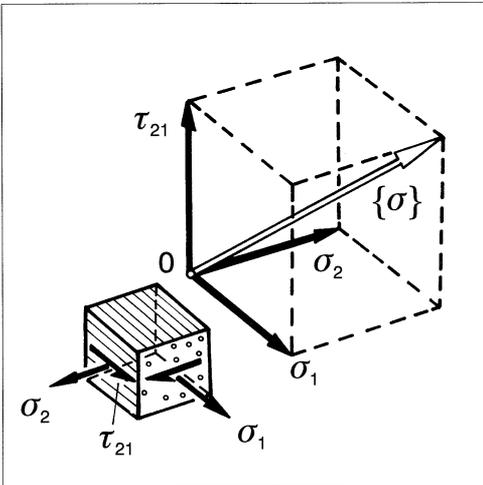


Bild 4.2: Darstellung eines $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustands als Spannungszustandsvektor $\{\sigma\}$

Es ist üblich, Spannungszustände als Vektoren oder Tensoren darzustellen. Bei der Bruchanalyse macht man häufig von der Vektordarstellung Gebrauch. Ein Vektor im sechsdimensionalen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum entzieht sich dem Vorstellungsvermögen, aber beim wichtigen ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand gelingt die Visualisierung im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum.

Der $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand wird durch einen **Spannungszustandsvektor** mit den rechtwinklig zueinander gerichteten Komponenten $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ dargestellt, so daß sich seine Länge aus $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$ ergibt, **Bild 4.2** auf S. 49. Dieser Vektor besitzt aber kein physikalisches Pendant in Gestalt einer "resultierenden Spannung".

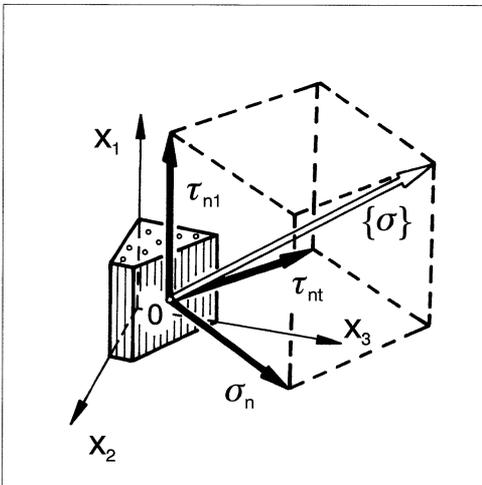


Bild 4.3: Darstellung der Zfb-relevanten Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ mit gemeinsamer Wirkebene als Spannungsvektor $\{\sigma\}$

Anders verhält es sich mit einem Vektor, der Spannungen repräsentiert, die auf ein und derselben Schnittebene wirken; man spricht von deren gemeinsamer **Wirkebene**.³ Das ist z.B. bei einer (σ_2, τ_{21}) -Kombination der Fall. Daß σ_2 und τ_{21} die gleiche Wirkebene besitzen, geht aus dem gemeinsamen Index 2 hervor. Noch eine weitere Spannung kann auf derselben Wirkebene auftreten, nämlich die Schubspannung τ_{23} . Die von solchen Spannungen mit gemeinsamer Wirkebene auf ein Flächenelement ausgeübten Kräfte lassen sich zu einer Resultante zusammenfassen. Obwohl der Ausdruck nicht ganz korrekt ist, spricht man deshalb auch von einer resultierenden Spannung. Diese korrespondiert sowohl nach ihrer Größe, z.B. $(\sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{23}^2)^{\frac{1}{2}}$, als auch nach ihrer Richtung vollkommen mit dem zu ihrer Darstellung benutzten Vektor. Für diesen gebraucht man nicht die Bezeichnung Spannungs-

³Der Begriff der Wirkebene hat in dieser Arbeit eine andere Bedeutung als in [11]. Dort bezeichnete er eine Ebene, in der die zu einem ebenen Spannungszustand gehörenden Kräfte wirken. Hier ist eine Schnittebene gemeint, auf der eine Normalspannung und/oder eine Schubspannung wirkt.

zustandsvektor sondern **Spannungsvektor**. Im Teil III des Buches ist häufig von den für den Zwischenfaserbruch entscheidenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ die Rede, die auf einer senkrecht zur x_n -Achse stehenden faserparallelen Schnittebene wirken. Sie erlauben eine Darstellung als Spannungsvektor im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum, **Bild 4.3**.

Durch die werkstoffspezifischen Bruchgrenzen ist die Höhe der realisierbaren Spannungszustände begrenzt. Die Spannungs(zustands)vektoren, die ihren Ursprung im Koordinaten-Nullpunkt des Spannungsraumes haben, können dementsprechend nur bis zur Bruch-Grenze anwachsen, die durch die Bruchbedingung (oder Bruchbedingungen, wenn es mehrere Bruch-Modi gibt), angegeben wird. In ihrer Gesamtheit bilden die Spitzen dieser "Bruch-Vektoren" eine – möglicherweise aus Teilflächen zusammengesetzte – Fläche im Spannungsraum, nämlich die Bruchgrenzfläche [51]. Der Kürze halber wird sie hier **Bruchfläche** genannt.

Dies hat allerdings den Nachteil, daß der Begriff – wenn er aus dem Sinnzusammenhang gelöst ist – auch als reale Werkstoff-Bruchfläche, die bei der Werkstoff-Trennung entsteht, mißverstanden werden kann. Um einer solchen Verwechslung vorzubeugen, wird in diesem Buch von der "**Bruchebene**" gesprochen, wenn die beim Bruch entstehende Bruchoberfläche gemeint ist, obwohl diese in Wirklichkeit natürlich Unebenheiten aufweist. Man denke deshalb vielleicht an eine durch die reale Bruchoberfläche gelegte "mittlere" Ebene.

Schnittkurven, die beim Schnitt der Bruchfläche durch bestimmte Ebenen entstehen, werden **Bruchkurven** genannt. Es war z.B. schon von der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve die Rede, also der Schnittkurve der $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchfläche mit der Ebene $\sigma_1 = 0$.

Solange von Eigenspannungen abgesehen wird, d.h. solange die Vektoren vom Koordinaten-Ursprung ausgehen, findet der Reservefaktor auf folgende Weise seine anschauliche Darstellung, s. auch Bild 4.1 auf S. 47:

$$f_{Res} = \frac{\text{Länge des Vektors der zum Bruch führenden Spannungen}}{\text{Länge des Vektors der vorhandenen Spannungen}}.$$

Gelegentlich richtet sich das Interesse weniger auf die Bruchgrenzen als vielmehr auf die ertragbaren Spannungszustände. Die Menge aller ertragbaren Spannungszustände wird durch den von der Bruchfläche umschlossenen Raum verkörpert. Man spricht deshalb auch vom **Bruchkörper**. Die Bruchfläche umhüllt alle Vektoren, die ertragbare Spannungszustände darstellen. Deshalb wird gelegentlich auch von der "Einhüllenden" gesprochen. Geläufig ist allerdings nur der Ausdruck "**Hüllkurve**" für eine (σ, τ) -Bruchkurve, wie sie z.B. zur Darstellung der Festigkeitshypothese von *O. Mohr* [54] dient.

Über die Gestalt der Bruchfläche kann a priori wenig ausgesagt werden. Vielfach wird aus Gründen der Eindeutigkeit der Lösung gefordert, daß sie konvex sein sollte. Nur in Ausnahmefällen wird sie sich als eine glatte, geschlossene Fläche darstellen, die sich durch eine einzige Funktion beschreiben läßt. Eine der wenigen Ausnahmen stellt die *von Mises*-Bedingung als Versagensbedingung für den "Fließbeginn" duktiler isotroper Werkstoffe dar.

Der entsprechende Versagenskörper ist ein Ellipsoid im $(\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H})$ -Spannungsraum, wobei $\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H}$ die Haupt-Normalspannungen sind. Unabhängig vom Spannungszustand führt immer der gleiche Vorgang zum Versagen, nämlich Fließen. Ganz anders als ein duktiler, isotroper und homogener Werkstoff verhält sich eine UD-Schicht aus Faser-Matrix-Verbundstoff. Wie bereits ausführlich erörtert, können die unterschiedlichsten Brucharten auftreten, wobei die gravierendsten Unterschiede zwischen Fb und Zfb existieren. Aber selbst beim Zfb lassen sich wieder drei bis vier Bruch-Modi unterscheiden. Deshalb ist die Bruchfläche des UD-Verbunds aus Teilflächen zusammengesetzt, die jeweils einem bestimmten Bruchmodus zugeordnet sind, s. Bild 5.7 auf S. 77.

Die Teilflächen werden mathematisch mit Hilfe von verschiedenen Bruchfunktionen beschrieben. Eine Funktion, die – von der Bruchart her gesehen – zusammengehörige Bruchspannungszustände beschreibt, muß stetig differenzierbar sein und darüber hinaus folgende Eigenschaft besitzen: Ist für einen Spannungszustand die Bruchbedingung erfüllt, d.h. der zugehörige Spannungszustandsvektor berührt mit seiner Spitze gerade die Bruchfläche, so muß die zur Formulierung der Bruchbedingung benutzte Bruchfunktion für einen Spannungszustand, dessen Komponenten alle im gleichen Maß verkleinert worden sind, einen Zahlenwert < 1 liefern und entsprechend für gleichmäßig vergrößerte Komponenten einen Wert > 1 . Wie bereits bei der Diskussion der Gl. (4.2), (4.3), (4.5) erwähnt, kann ein und dieselbe Bruchfläche durch unterschiedliche Funktionen beschrieben werden, denn nicht auf die **Funktion** $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ als solche kommt es an, sondern nur auf die **Fläche** $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1$. Zum direkten Ausrechnen des Reservefaktors f_{Res} oder der Anstrengung muß die Funktion jedoch bezüglich der Spannungen homogen vom Grad -1 bzw. 1 sein. (Logischerweise steigt bei der vorgenommenen Definition die Anstrengung eines Werkstoffs linear mit der Spannungshöhe an.) Die Gl. (4.6) ist nicht homogen. Erst die Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung führt dann auf eine Funktion für f_{Res} , die in den Spannungen homogen vom Grad -1 ist, also für $\mathcal{E} = 1/f_{Res}$ homogen vom Grad 1 . Schreibt man die Bruchbedingung nun mit $f_{Res} = 1$ oder $\mathcal{E} = 1$, hat man die ursprünglich inhomogene Bruchfunktion in Gl. (4.6) durch eine homogene ersetzt.

Findet man eine Bruchbedingung vor, deren Bruchfunktion bezüglich der Spannungen homogen vom Grad -1 oder 1 ist, so kann man sicher sein, daß diese die einzige existierende homogene Funktion vom Grad -1 bzw. 1 ist, mit der die betreffende Bruchfläche beschrieben werden kann, und daß sie den Reservefaktor f_{Res} bzw. die Anstrengung \mathcal{E} darstellt [55].

Eine UD-Schicht wird – jedenfalls im idealisierten Modell – in der (x_2, x_3) -Ebene, d.h. in der quer zur Faserrichtung stehenden Ebene, als isotrop betrachtet. Man bezeichnet einen solchen Werkstoff als **transversal-isotrop**. Die errechneten zum Bruch führenden Spannungen dürfen nicht davon abhängen, wie man in der transversalen Ebene die Lage des Koordinatensystems wählt, auf das die Spannungen bezogen werden. Mathematisch bedeutet dies:

Die Bruchfunktion muß **invariant** gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems um die Faserrichtung sein. Dies kann auf zweierlei Weise erreicht werden: Man formuliert entweder die Bruchfunktion von vornherein als Funktion von Invarianten, die für den transversal-isotropen Werkstoff passend sind (wie z.B. in [3]), oder man sorgt nachträglich dafür, daß durch Parameterverknüpfung die transversale Isotropie erreicht wird (wie z.B. in [5] und [6].)

4.3 Kurzer geschichtlicher Rückblick

Im Ganzen gesehen hat die Entwicklung der Bruchkriterien für Faser-Matrix-Verbunde in den letzten Jahrzehnten keinen glücklichen Verlauf genommen.

Weil Verstärkungsfasern in dünnwandigen Scheiben und Schalen, d.h. bei vorherrschenden ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ - Beanspruchungen, am wirksamsten sind und deshalb solche Anwendungen in der Frühzeit der Faserverbundtechnik vorherrschten, wurden die meisten Bruchbedingungen für UD-Schichten zunächst auch nur für eine solche 2D-Beanspruchung aufgestellt. Man benutzte statt echter Bruchbedingungen für zusammengesetzte Beanspruchung drei voneinander unabhängige Grenzwerte, z.B. in Spannungen ausgedrückt [56]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} R_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ R_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \sigma_1 < 0 \end{array} \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} R_{\perp}^{(+)} & \text{für } \sigma_2 > 0 \\ R_{\perp}^{(-)} & \text{für } \sigma_2 < 0 \end{array} \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1. \quad (4.12)$$

Diese ermöglichen es, Fb und Zfb zu unterscheiden, denn man weiß, daß σ_1 zu Fb führt und daß σ_2 ebenso wie τ_{21} Zfb verursacht. Sie berücksichtigen jedoch nicht, daß σ_2 und τ_{21} bei der Erzeugung eines Zfb zusammenwirken. Dies wurde erst 1969 durch Angabe von nur zwei voneinander unabhängigen Bruchbedingungen erfaßt [1,2], **Bild 4.4**:

$$\begin{array}{ll} \text{Fb:} & \left(\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} R_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ R_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \sigma_1 < 0 \end{array} \\ \text{Zfb:} & \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} R_{\perp}^{(+)} & \text{für } \sigma_2 > 0 \\ R_{\perp}^{(-)} & \text{für } \sigma_2 < 0 \end{array} \end{array} \quad (4.13)$$

Diese gesonderten Bruchbedingungen für den Zug- und Druckbereich von σ_2 sind zwar insofern physikalisch plausibel, als die Festigkeit im Zugbereich nicht von der Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ abhängt und die Festigkeit im Druckbereich nicht von der Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$. Die

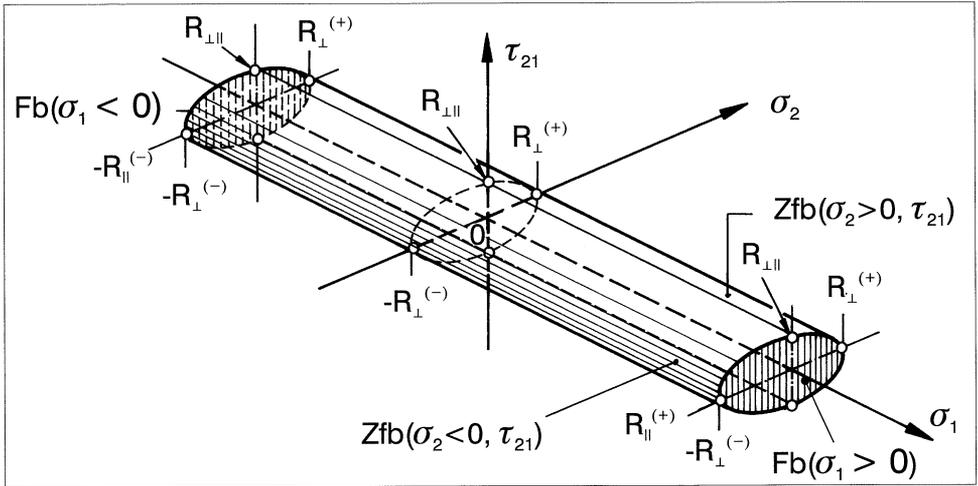


Bild 4.4: Darstellung der Fb-Bedingung (4.10) und der Zfb-Bedingung (4.13) als Bruchkörper, dessen Oberfläche aus 4 Teil-Bruchflächen zusammengesetzt ist

Gl. (4.13) berücksichtigt aber noch nicht die "innere Reibung" durch $\sigma_2 < 0$, die zu ertragbaren Schubspannungen τ_{21} führt, die höher als $R_{\perp\parallel}$ sind.

Hashin und Rotem publizierten 1973 eine Arbeit [57] zur Entwicklung einer Bruchbedingung für schwellende Beanspruchung, in der sie ebenfalls hervorhoben, daß Fb und Zfb unterschieden werden müssen. Als gut geeignet zur Beschreibung von UD-Verbunden bei schwellender $(\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung empfahlen sie gleichfalls die Gln. (4.10) und (4.13).

Eine besser an Versuchsergebnisse angepaßte Form der Bruchkurve ist die "verschobene" Ellipse nach Gl. (4.6) auf S. 47, die u.a. von Hoffmann benutzt wurde, die allerdings den physikalischen Widerspruch aufweist, daß die Festigkeit im Zugbereich von der Druckfestigkeit und das Festigkeitsverhalten im Druckbereich auch von der Zugfestigkeit abhängt:

Die beiden Spannungen σ_2 und τ_{21} wirken auf einer gemeinsamen Schnittebene. Diese wird, sofern σ_2 eine Zugspannung ist, beim Zfb auch zur Bruchebene. Hieran wird bei den späteren Überlegungen zu einer verbesserten Bruchanalyse im Teil III des Buches angeknüpft.

Eine ganz anders geartete Gattung stellen die sog. "pauschalen" oder "globalen" Bruchbedingungen dar, die auf die verschiedenen Bruchmechanismen Fb und Zfb keine Rücksicht nehmen. Sie vereinigen eine Anzahl von Spannungen und experimentell ermittelten Festigkeiten in einer einzigen stetig differenzierbaren Funktion, d.h. die Bruchbedingung stellt sich als "glatte" Bruchfläche im bis zu sechsdimensionalen Spannungsraum dar. Der "Stammvater" dieser Generation von Bruchbedingungen ist die 1948 von Hill auf den Fall leicht anisotro-

per duktiler Metalle erweiterte *von Mises*- Fließbedingung aus dem Jahre 1913. Ohne die heterogene Struktur und das andersartige Bruchverhalten zu berücksichtigen, übertrugen *Tsai* und *Azzi* [58] 1965 in den USA die Hillschen Ansätze auf Faserverbunde. Damit war es – aus der Sicht des Autors – zu einer falschen Weichenstellung gekommen, denn nun folgte man vielerorts dieser mehr mathematischen als werkstoffkundlichen Betrachtungsweise. Eine vergleichbare Fehlentwicklung gab es auch in der Sowjetunion.

Ein Ansatz für 3D-Beanspruchung dieser Kategorie "anisotropes homogenes Kontinuum mit einheitlichem Bruchgeschehen", der beliebig viele Koeffizienten enthalten kann, stammt von *Gol'denblat* und *Kopnov* [59]:

$$(F_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots = 1, \tag{4.14}$$

$$i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \quad \text{usw.}$$

Weiteste Verbreitung hat eine Vereinfachung der *Gol'denblat, Kopnov*-Bruchbedingung gefunden. Mit $\alpha = \beta = 1$ beschränkt sie sich auf quadratische und lineare Spannungsterme. Sie wurde 1963 von *Zacharov* [60] veröffentlicht und ab 1971 von *Tsai* und *Wu* [61] weltweit als "die überlegene Faserverbund-Bruchbedingung" herausgestellt. Für (σ_1, σ_2) -Beanspruchung stellt sie eine verschobene und gedrehte Ellipse dar, **Bild 4.5**.

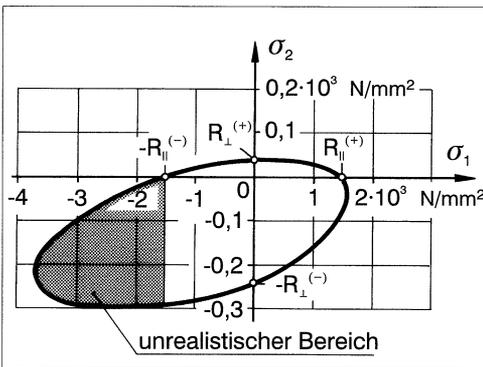


Bild 4.5: (σ_1, σ_2) -Bruchkurve nach *Tsai, Wu* [61] für CFK nach [38], dort S. 263. Im 3. Quadranten wird die faserparallele Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ mit einem Faktor 2,5 überschritten! (Basis-Festigkeiten: $R_{||}^{(+)} = R_{||}^{(-)} = 1500 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(+)} = 40 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(-)} = 246 \text{ N/mm}^2$)

Bestehend an dieser im Westen als *Tsai, Wu*-Bruchbedingung bekannt gewordenen Formulierung ist ihre mathematische Eleganz. Man hat nur eine einzige Gleichung zu bearbeiten, und sie läßt sich mit den bekannten Tensortransformationen in verschiedene Richtungen transformieren. Auch verleitet die Tatsache, daß zwischen fast allen Spannungen "Interaktionen" bestehen, zu der Vermutung, daß die Physik wohl ganz gut berücksichtigt sei; alle Spannungen werden formal vollkommen gleich behandelt. In Wirklichkeit sind aber einige der Interaktionen höchst fragwürdig, wie auch aus Bild 4.5 hervorgeht.

Da solche "anisotrop gemachten Fließ-Bedingungen", die ein einheitliches Bruchgeschehen bei allen Spannungszuständen voraussetzen, naturgemäß keine Angabe über die tatsächliche Bruchart bei Faser-Matrix-Verbunden liefern, kann man mit ihnen bei der schichtweisen Bruchanalyse von Laminaten auch nicht in physikalisch vertretbarer Weise über den Beginn der mit den ersten Zwischenfaserbrüchen einsetzenden Rißbildung hinweg rechnen.

In den 70-er Jahren herrschte in Deutschland, basierend auf Vorstellungen von einer "universellen" kritischen Dehnung bei Thermoplasten, zeitweilig die Meinung vor, daß "Dehnungs-Kriterien" sich auch für Faser-Kunststoff-Verbunde besser eignen würden als die bisherigen "Spannungs-Kriterien" [62]. Es wurden analog zu den mit Spannungen formulierten Grenzbedingungen (4.10) bis (4.12) entsprechende Bedingungen mit den Verzerrungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21}$ aufgestellt. Diese aus dem Gebiet der isotropen Kunststoffe übernommene Betrachtungsweise scheidet aber, wenn sie auf Zfb angewandt wird, letztendlich an der "Tücke" der Orthotropie der stark anisotropen Faser-Matrix-Verbunde [42].

Bei der jüngsten der bisherigen Bruchbedingungen-Generationen werden Fb und Zfb wieder, wie schon in der Frühzeit, unterschieden. Sie sind für 2D- und 3D-Beanspruchung anwendbar. Zwei bekannte Vertreter dieser Gattung sind die Polynome von *Hashin* [3] und *Puck, Knaust* [6,63]. Bei diesen werden für Fb – zumindest bei isotropen Fasern wie Glasfasern – nach wie vor einfache Ansätze wie Gl. (4.10) auf S. 53 benutzt, oder stattdessen auch:⁴

$$\text{Fb: } \left(\frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} e_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \varepsilon_1 > 0 \\ e_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \varepsilon_1 < 0. \end{array} \quad (4.15)$$

Hierin ist e_{\parallel} die Bruchdehnung des UD-Verbunds in Faserichtung.

Bei stark anisotropen Fasern wie Kohlenstofffasern und Fasern aus aromatischem Polyamid (Aramid) müssen u.U. auch Querspannungen und Schubspannungen berücksichtigt werden [6,11,28,64].

Die Zfb-Bedingungen dieser bisher jüngsten Generation "konventioneller" Bruchbedingungen sind Interpolationspolynome der Form von Gl. (4.14), in denen aber – anders als in dieser – nur Spannungen und Festigkeiten vereinigt werden, die zum Zfb gehören. So tritt in der Zfb-Bedingung von *Hashin* [3] die Spannung σ_1 gar nicht auf, und es wird beim Zfb sogar auch noch Zugversagen und Druckversagen der Matrix unterschieden. Insofern lassen sich diese Bruchbedingungen aus physikalischer Sicht im Vergleich zu den Fb und Zfb vermischenden Polynomen nach *Tsai, Wu* und anderen Autoren noch am ehesten vertreten. Sie weisen aber doch noch erhebliche Ungereimtheiten auf, vor allem bei 3D-Beanspruchung, die erst durch die im Teil III dargestellte neue Art von Zfb-Bedingungen überwunden werden.

⁴Gl. (4.15) für Fb ist der einzige bekannte Fall, in dem sich eine echte Dehnungs-Bruchbedingung bewährt.

Teil II

Entwicklungsstand bei den Bruchanalyse-Modellen für Beanspruchung in der Schichtebene

5 Bruchbedingungen

5.1 Bruchbedingungen für Zwischenfaserbruch

5.1.1 Wege zu erhöhter Aussagekraft

Der entwerfende und dimensionierende Konstrukteur kann sich heutzutage nicht mehr damit zufriedengeben, daß eine Bruchbedingung ihm nur die Information liefert, daß eine Spannungscombination zu irgendeinem Bruch führt. Zumindest muß er, um zielgerichtet erfolgversprechende Änderungen am Laminat-Entwurf vornehmen zu können, eindeutig darüber Aufschluß erhalten, ob es sich um Faserbruch oder Zwischenfaserbruch handelt. Bei Fb ist eine Vergrößerung der Dicke der betroffenen Schicht angeraten¹, während dies bei Zfb normalerweise keine wirksame Abhilfe schafft. Den Zfb in einer Schicht kann man meistens nur dadurch unterdrücken oder zu höheren Belastungen verschieben, daß man Schichten mit anderen Faserrichtungen, die sich um 90° bzw. $\pm 45^\circ$ von der Faserrichtung der betroffenen Schicht unterscheiden, entweder neu anordnet oder vorhandene mit ungefähr passender Faserrichtung dicker ausführt. Aber selbst wenn die Information "Zfb" eindeutig ist, möchte man zusätzlich erfahren, um welchen Modus es sich handelt. Ist es der Modus C, interessiert die Größe des Bruchwinkels, damit die von dem schrägen Bruch ausgehende Sprengwirkung im Laminat beurteilt werden kann.

Alle diese Wünsche blieben bislang weitgehend unerfüllt; ganz besonders natürlich bei der Benutzung einer Global-Bruchbedingung in Verbindung mit dem First Ply Failure-Konzept. Dieses basiert lediglich auf der Vermutung, daß der erste Schicht-Bruch im Laminat ein Zfb ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß dies nicht immer zutrifft. Zwischen FPF und Totalbruch erhält man mit diesem Konzept keine Information über das sukzessive Bruchgeschehen.

Ein wesentlicher Fortschritt konnte in neuerer Zeit durch eine neuartige Bruchanalyse-Methode erzielt werden, in die Teil III des Buches einen Einblick vermittelt. Die damit gewonnenen Zfb-Bedingungen basieren auf der Erfahrung, daß die allermeisten Faserverbundstoffe sich beim Zwischenfaserbruch ausgesprochen spröd verhalten, so daß auf sie die altbekannte

¹Eine Ausnahme stellen Federelemente dar. Bei diesen müssen ganz bestimmte Steifigkeiten eingehalten werden. Deshalb kann im allgemeinen die Fasermenge nicht erhöht werden. Hier hilft u.U. eine geschicktere Faserorientierung [19,20,27,44].

Festigkeitshypothese von *O. Mohr* [54] angewandt werden kann, die folgendermaßen lautet:

Die Bruchgrenze eines Materials wird durch die Spannungen der Bruchebene bestimmt.

Hashin hat schon in einer 1980 erschienenen Publikation [3] den Gedanken geäußert, daß man Bruchbedingungen für UD-Faserverbunde auf eine gesunde physikalische Basis stellen könne, wenn man die Mohrsche Festigkeitshypothese sinngemäß auf UD-Verbunde übertragen würde. Er hat die Idee jedoch nicht umgesetzt, weil er den mit solchen "wirkenebenebezogenen" Bruchbedingungen verbundenen numerischen Aufwand scheute. Nachdem heute auch im Konstruktionsbüro eine unvergleichlich größere Rechenkapazität verfügbar ist als in den 80-er Jahren, spielt der numerische Aufwand keine so große Rolle mehr. Überraschenderweise wurde nun sogar gefunden, daß im Vergleich zu den heute gebräuchlichen Bruchbedingungen überhaupt kein zusätzlicher Rechenaufwand entsteht, solange nur der für Faserverbundbauteile oft maßgebende $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand behandelt zu werden braucht. Deshalb werden im folgenden Abschnitt bereits Bruchbedingungen der neuen Art empfohlen. Sie liefern nicht nur physikalisch plausible Spannungen beim Bruch, sondern zusätzlich auch noch die Informationen "Bruch-Modus" und "Bruchwinkel".

5.1.2 Empfehlenswerte Zwischenfaserbruch-Bedingungen

Obwohl die hier aufgeführten Zfb-Bedingungen auf einer recht anspruchsvollen Betrachtungsweise beruhen, die aus der Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese resultiert, sind sie für die Konstruktionspraxis wegen ihrer einfachen Handhabbarkeit bestens geeignet. Am leichtesten erkennt man aus **Bild 5.1**, wodurch sie sich von den bisher gebräuchlichen Bruchbedingungen unterscheiden. Gezeigt ist die vollständige (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve in der Schnittebene $\sigma_1 = 0$. Sie setzt sich aus je einem Abschnitt von zwei Ellipsen für die Modi A und C und zwei Abschnitten einer Parabel für den Modus B zusammen. Die Schnittpunkte mit den Achsen sind selbstverständlich – wie bei herkömmlichen Bruchbedingungen auch – durch die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$, die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ und die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ gegeben, aber die Festigkeit bei kombinierter Beanspruchung im Bereich $\sigma_2 > 0$ wird nicht von $R_{\perp}^{(-)}$ und die Festigkeit im Bereich $\sigma_2 < 0$ nicht durch $R_{\perp}^{(+)}$ beeinflusst. Als Parameter erscheinen in den Bruchbedingungen neben den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp}^{(-)}$, $R_{\perp\parallel}$ die Neigungen $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ der Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$. Die drei eigenständigen Bruchbedingungen für die Bruchmodi A, B, C lauten:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}} = 1 \quad \text{für Modus A,} \quad (5.1)$$

Tabelle 5.1 Zwischenfaserbruchbedingungen für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung bei $\sigma_1 = 0$ und Beziehungen zwischen den werkstoffspezifischen Parametern.

| Bruch-Modus | Bruchbedingung | Gl.nr. | Gültigkeitsbereich |
|--|---|--------|--|
| A $\theta_{fp} = 0^\circ$ | $\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - \frac{R_{\perp\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^{(+)}} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} = 1$ | (5.1) | $\sigma_2 \geq 0$ |
| B $\theta_{fp} = 0^\circ$ | $\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right) = 1$ | (5.2) | $\sigma_2 < 0$ und $0 \leq \left \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{ \tau_{21c} }$ |
| C $\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2}}$ | $\left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^{(-)}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp\perp}^{(-)}}{(-\sigma_2)} = 1$ | (5.3) | $\sigma_2 < 0$ und $0 \leq \left \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right \leq \frac{ \tau_{21c} }{R_{\perp\perp}^A}$ |

| | | |
|-----------------------------------|---|---|
| Defini- tion | $p_{\perp\parallel}^{(+)} = - \left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2} \right)_{\sigma_2=0}$ der (σ_2, τ_{21}) - Kurve für $\sigma_2 \geq 0$ | $p_{\perp\parallel}^{(-)} = - \left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2} \right)_{\sigma_2=0}$ der (σ_2, τ_{21}) - Kurve für $\sigma_2 \leq 0$ |
| Parameter- Beziehungen | $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel} \frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\parallel}}$ | $R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}} \left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel} \frac{R_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right)$ (5.6) |
| | | $\tau_{21c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad (5.9)$ |

Möglichkeiten zur Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 finden sich in den Abschnitten 5.1.3 und 9.4.1

In der Gl. (5.3) für den Modus C erscheint der Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$, der an der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve nicht unmittelbar in Erscheinung tritt. Er bezieht sich auf die Bruchkurve für eine kombinierte $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp})$ -Beanspruchung, die beim schrägen Bruch nach Modus C eine Rolle spielt. Der Wert von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bestimmt auch die Höhe des Maximums der ertragbaren Schubspannung im Bereich $\sigma_2 < 0$ (s. Gl. (5.10)).

Die Bruchbedingungen für die Modi A, B, C haben ihren Ursprung in zwei "wirkebene-bezogenen" Ansätzen für die auf einer beliebigen faserparallelen Schnittebene auftretende Anstrengung in bezug auf Zfb (Inter Fibre Fracture, IFF) infolge der dort herrschenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$. Dabei müssen die Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$ unterschieden werden. Die schnittwinkelabhängige Zfb-Anstrengung ist

$$\mathcal{E}_{IFF}(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp\parallel}^{(+)}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{E}_{IFF}(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (5.5)$$

Bei dem den Bruchbedingungen für die Modi B und C zugrundeliegenden "parabolischen Ansatz" nach Gl. (5.5) ist von einer vorausgesetzten Kopplung der Neigungsparameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ der folgenden Art Gebrauch gemacht worden:

$$\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}. \quad (5.6)$$

Zur Festlegung der Parameter aufgrund vorliegender Versuchsergebnisse bestimmt man zweckmäßigerweise $p_{\perp\perp}^{(-)}$ aus der Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\sigma_2 \leq 0$ im Schnittpunkt mit der τ_{21} -Achse. Durch die Wahl von $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ sind auch die Koordinaten des Umschlagpunkts c festgelegt, s. Gl. (5.9) und Bild 5.1. In diesem schließen sich die Parabel für Modus B und die Ellipse für Modus C knickfrei, d.h. mit gleicher Neigung, aneinander an. Dies hat seinen Grund darin, daß beide Kurven in der Gl. (5.5) ihren gemeinsamen Ursprung haben. Bei Faser-Kunststoff-Verbunden liegt $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ meistens zwischen 0,1 und 0,3. Etwas höher ergibt sich oft der Wert des Neigungsparameters $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ der Bruchkurve für den Modus A. Gegenüber der heute meistens als (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve benutzten verschobenen Ellipse nach Gl. (4.6) auf S. 47 stehen für die Anpassung an Versuchsergebnisse außer den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}$ zusätzlich die freien Parameter $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ zur Verfügung. Damit ist in der Regel eine wesentlich bessere Anpassung an Versuchsergebnisse als mit der *Tsai, Wu*-Bruchbedingung möglich; ein Beispiel zeigt **Bild 5.2**.

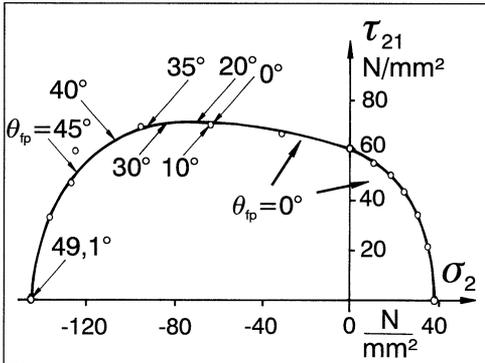


Bild 5.2: Anpassung der Bruchbedingungen nach Gl. (5.1), (5.2) und (5.3) an Versuchsergebnisse von *Knappe* und *Schneider* [87] mit Neigungsparametern $p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,43$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,16$. Der theoretisch zu erwartende Bruchwinkel θ_{fp} wurde mit Gl. (5.7) berechnet.

Der zu erwartende Bruchwinkel θ_{fp} wird rechnerisch ermittelt, indem man unter allen als Bruchebene in Betracht kommenden faserparallelen Schnittebenen zwischen $\theta = -90^\circ$ und $\theta = +90^\circ$ diejenige mit der maximalen schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ sucht. Der Schnittwinkel, unter dem sich das Maximum von $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ errechnet, ist der sich beim Modell einstellende Bruchwinkel θ_{fp} . Solange sich bei einer (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung $\theta_{fp} = 0^\circ$ ergibt, lassen sich die Bruchbedingungen (5.4) und (5.5) aus dem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum sehr einfach in die (σ_2, τ_{21}) -Ebene übertragen, denn mit den Transformationsformeln nach Gl. (2.1) auf S. 27 ist $\sigma_n = \sigma_2, \tau_{nt} = 0, \tau_{n1} = \tau_{21}$. Beim Vergleich von (5.1) mit (5.4) sowie (5.2) mit (5.5) werden diese Zusammenhänge sogleich offenbar.

Der Bruchbedingung (5.3) für den Modus C kann man nicht ansehen, daß sie genauso wie (5.2) ihren Ursprung in dem "parabolischen Ansatz" nach Gl. (5.5) hat. Beim Modus C ist der Bruchwinkel $\theta_{fp} \neq 0^\circ$, so daß die Spannungs-Transformation nach Gl. (2.1) nicht so einfache Ergebnisse liefert wie beim Modus A und B. Es ist deshalb sehr überraschend, daß sich auch für den Modus C eine höchst einfache Bruchbedingung in Form einer Ellipsengleichung ergibt. Womit dies zusammenhängt, wird im folgenden kurz erläutert. (Eine ausführliche Darstellung mit dem erforderlichen mathematischen Beweis findet sich im Abschnitt 9.5.2).

Wandert man auf der Bruchkurve in Bild 5.1 vom Punkt b, der zur reinen $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung gehört, zum "Umschlagspunkt" c, an dem der Bruch vom "geraden" Bruch ($\theta_{fp} = 0^\circ$) in einen "schrägen" Bruch ($\theta_{fp} \neq 0^\circ$) umschlägt, so wächst dabei die Druckspannung auf der Bruchebene ($\theta_{fp} = 0^\circ$) von $\sigma_n = \sigma_2 = 0$ bis $\sigma_n = \sigma_2 = -R_{\perp\perp}^A$ an. Eigenartigerweise zeigt sich nun, daß (bei dem gewählten Modell) bei Überschreitung des Punktes c die erreichte Druckspannung **auf der Bruchebene**, $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$, konstant bleibt. Dies kommt dadurch zustande, daß sich die Bruchebene umso "schräger" einstellt, je höher die Druckspannung $|\sigma_2|$ wird.

Dies Phänomen hat zur Folge, daß sich der Bruchwinkel θ_{fp} beim Modus C ganz einfach berechnen läßt, denn es gilt $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{fp} = -R_{\perp\perp}^A$. Die überraschend simple Beziehung

für den Bruchwinkel beim Modus C lautet daher:

$$\theta_{fp} = \arccos \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2}} \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.7)$$

Hierin ist σ_2 der Wert der Druckspannung **beim Bruch!** $R_{\perp\perp}^A$ ist ein Festigkeitsparameter, der in den neuen Bruchbedingungen in Verbindung mit der Schubspannung τ_{nt} auftaucht, die eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung darstellt. ($R_{\perp\perp}^A$ ist der Bruchwiderstand, den die Spannungswirkebene ihrem Bruch durch eine in ihr wirkende alleinige $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung entgegensetzt). Es besteht eine Beziehung zwischen $R_{\perp\perp}^A$ und der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, Gl. (9.13) auf S. 142, die vom gewählten Bruchmodell abhängt. Aus ihr folgt mit Gl. (5.6):

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})} = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right). \quad (5.8)$$

Es ist zu beachten, daß bei Berücksichtigung eines die Zfb-relevanten Festigkeiten schwächenden Einflusses der faserparallelen Spannung σ_1 in der Gl. (5.7) für den Bruchwinkel bei $R_{\perp\perp}^A$ ein Vorfaktor (Schwächungsfaktor) f_w erscheint, der dafür sorgt, daß σ_1 keinen Einfluß auf den Bruchwinkel gewinnt. Nähere Einzelheiten hierzu können dem Abschnitt 9.5.2 im Teil III entnommen werden.

Auf der Bruchkurve für $\sigma_1 = 0$ hat der Umschlagspunkt c die Koordinaten:

$$\sigma_{2c} = -R_{\perp\perp}^A \quad \text{und} \quad \tau_{21c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.9)$$

Da die zum Modus C gehörende Ellipse stets durch den Koordinaten-Nullpunkt verläuft, Bild 5.1, findet sich die höchste ertragbare Schubspannung bei $\sigma_2 = -0,5R_{\perp}^{(-)}$, und ihre Höhe ergibt sich bei $\sigma_1 = 0$ aus

$$\tau_{21\max} = R_{\perp\parallel}(1 + p_{\perp\perp}^{(-)}) \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.10)$$

Ein Blick auf die Tabelle 5.1 bestätigt, daß bei der Anwendung der neuen Bruchbedingungen von einem erhöhten Rechenaufwand überhaupt keine Rede sein kann. Anders als bisher üblich muß man lediglich vorab aufgrund des Verhältnisses $|\tau_{21}/\sigma_2|$ entscheiden, welche der drei Bruchbedingungen anzuwenden ist. Dafür erhält man aber neben der besseren Anpaßbarkeit die wertvolle Information über den zu erwartenden Modus des Zfb. In den Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) sind die jeweiligen Bruchfunktionen bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1; der Zahlenwert der Bruchfunktion gibt also bereits die Anstrengung $\mathcal{E} = (f_{Res})^{-1}$ an.

5.1.3 Einfluß der faserparallelen Spannung

Gemäß der Mohrschen Festigkeitshypothese dürfte die faserparallele Spannung keinen Einfluß auf den Zwischenfaserbruch haben, denn dieser findet auf einer faserparallelen Ebene statt, und die dort wirkenden Spannungen hängen nicht von σ_1 ab, sondern nur von $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Im Experiment kann man aber Mikro-Brüche in der Matrix bei alleiniger σ_1 -Beanspruchung erzeugen, wenn man eine Matrix verwendet, die eine deutlich niedrigere Bruchdehnung besitzt als die Fasern. Dabei handelt es sich dann allerdings nicht um Zfb in der hier gemeinten Bedeutung, sondern um Mikro-Risse, die quer zu den Fasern verlaufen und an diesen gestoppt werden. Beim Überschreiten der Matrix-Bruchdehnung erscheinen solche Risse zwischen den Elementarfasern in großer Zahl; das Phänomen wird deshalb oft als "multiple fracture" bezeichnet [6, 29]. Es hat seine Ursache darin, daß bei einer σ_1 -Beanspruchung die Matrix mit den Fasern "parallel geschaltet" ist; das bedeutet, daß die Matrix die gleiche Dehnung ε_1 wie die Fasern erfährt. Selbstverständlich trachtet man stets danach, ein Matrixmaterial zu verwenden, dessen Bruchdehnung größer als die der Fasern ist, aber wenn hohe Wärmebeständigkeit verlangt wird, ist dies oft nicht möglich. In solchen Fällen vermindern die sich einstellenden Mikroschäden durch σ_1 natürlich die "Zfb-Festigkeiten".

In früheren Arbeiten [1, 2, 6, 42, 63] wurde auch für Faser-Matrix-Kombinationen, bei denen die Matrix eine deutlich höhere Bruchdehnung als die Fasern hatte, "vorsichtshalber" ein vermindender Einfluß der σ_1 -Beanspruchung auf die zur Zfb-Grenze gehörenden Spannungen angenommen. Bei einer "quadratischen" Zfb-Bedingung geschah dies, indem den Termen mit $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ ein Zusatzterm $Z(\sigma_1)$ hinzugefügt wurde, wobei zwei verschiedene Formen benutzt wurden, und zwar entweder

$$Z(\sigma_1) = \left(\frac{\sigma_1}{E_{\parallel} e_M^{(\pm)}} \right)^2 \begin{array}{l} e_M^{(+)} \text{ für } \varepsilon_1 > 0 \\ e_M^{(-)} \text{ für } \varepsilon_1 < 0 \end{array}, \quad (5.11)$$

oder

$$Z(\sigma_1) = \frac{\sigma_1^2}{E_{\parallel}^2 e_M^{(+)} e_M^{(-)}} + \frac{\sigma_1}{E_{\parallel}} \left(\frac{1}{e_M^{(+)}} - \frac{1}{e_M^{(-)}} \right). \quad (5.12)$$

Hierin sind $E_{\parallel} e_M^{(+)}$ und $E_{\parallel} e_M^{(-)}$ die σ_1 -Spannungen des UD-Verbunds, bei der die Zug-Bruchdehnung $e_M^{(+)}$ bzw. Druck-Bruchdehnung $e_M^{(-)}$ der Matrix erreicht wird.

Ohne diesen Zusatzterm wäre der in [2] beschriebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörper ein sich in σ_1 -Richtung erstreckender Zylinder mit elliptischem Querschnitt nach Bild 4.4 auf S. 54. Mit dem Zusatzterm $Z(\sigma_1)$ wird er mit Gl. (5.12) zu einem sehr langgestreckten Ellipsoid [6,42,63], mit Gl. (5.11) zu einem Bruchkörper aus zwei Halb-Ellipsoiden [1,2]. Die Endkuppen dieser Zfb-Ellipsoide werden durch die Faserbruchflächen weggeschnitten. Für diese Form des $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörpers entstand der Ausdruck "Bruch-Zigarre", **Bild 5.3**.

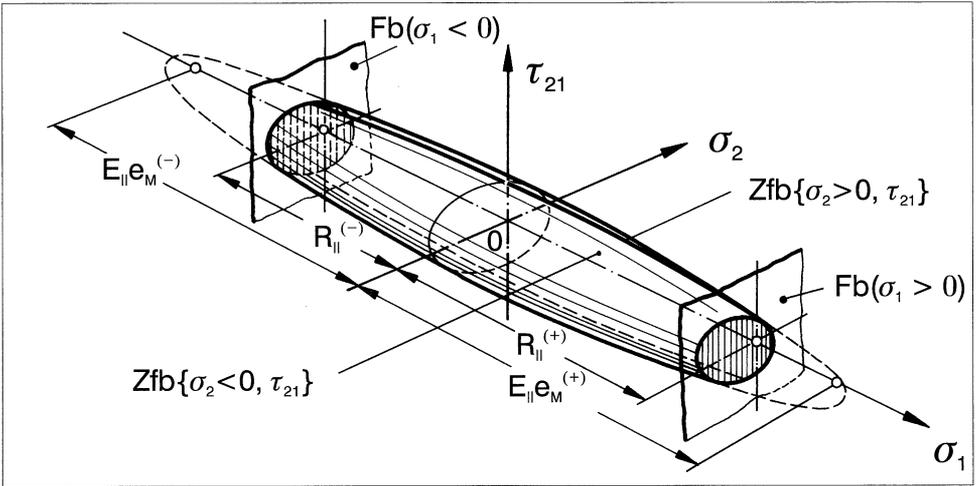


Bild 5.3: Als "Bruch-Zigarre" bezeichneter Bruchkörper für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände

Wahrscheinlich bleibt man bei der Berechnung des Zfb-Reservefaktors bei $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung auf der "sicheren Seite", wenn man einen Zusatzterm in der Art der Gl. (5.11) oder Gl. (5.12) in die Zfb-Bedingung einführt. Trotzdem ist diese Vorgehensweise unbefriedigend, denn es bestehen Zweifel, ob dies auch der Realität gerecht wird. Es ist nicht zu erwarten, daß sich σ_1 in allen Oktanten des $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraumes gleich auswirkt. Bei einer σ_2 -Druckbeanspruchung könnte sich eine zusätzliche σ_1 -Druckbeanspruchung auch erhöhend statt vermindern auf die Zfb-Festigkeit auswirken. Dieser Fragen müßte sich die Forschung noch annehmen.

Die Beantwortung der mit dem σ_1 -Einfluß zusammenhängenden Fragen wird dadurch erheblich erschwert, daß beachtliche Verspannungen zwischen Fasern und Matrix in der Faserrichtung auftreten. Erste "Mikro-Eigenstressungen" entstehen bei der Herstellung des Faser-Matrix-Verbunds als Folge der Reaktionsschwindung des Matrixmaterials und desweiteren bei der Abkühlung nach der Härtung. Weil der Wärmeausdehnungskoeffizient des Matrixmaterials wesentlich höher ist als der der Fasern (Kohlenstofffasern besitzen sogar einen leicht negativen Wärmeausdehnungskoeffizienten in Faserrichtung), sind die Abkühlspannungen in der Matrix – ebenso wie die Spannungen aus der Reaktionsschwindung – stets Zugspannungen. Teilweise können diese durch Druckspannungen ausgelöscht werden, die bei der Quellung des Matrixmaterials infolge Feuchtigkeitsaufnahme entstehen. Gefährlicher als stationäre Zustände sind für ein Laminat hohe Temperatur- und Feuchtegehalts-Gradienten. Es ist absehbar, daß in diesem Bereich trotz aller Forschungsbemühungen manche Einflüsse rechnerisch nur sehr ungenau erfaßbar bleiben werden.

Eine weitere Ursache für Mikro-Eigenstressungen, die aber etwas besser durchschaubar ist, sind die Querkontraktionsbehinderungen der Matrix durch die Fasern, die bei einer Querbeanspruchung des Verbunds durch σ_2 und/oder σ_3 auftritt. Weil der Quer-E-Modul der Fasern höher ist als der E-Modul der Matrix, tritt bei Querbeanspruchung eine viel größere Dehnung in der Matrix (quer zur Faserrichtung) auf als in der Faser. Man spricht von der Dehnungs-Vergrößerung, **Bild 5.4**.

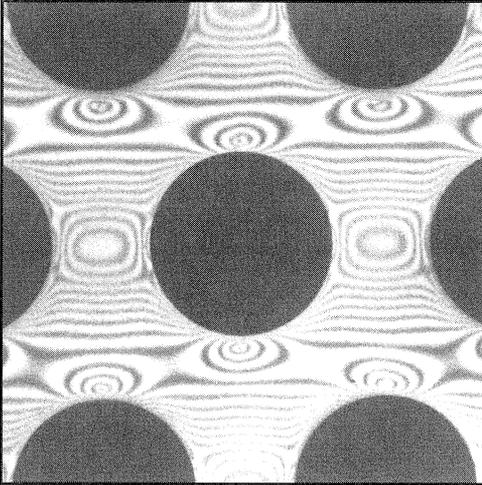


Bild 5.4: Isochromaten am Makro-Modell für GFK bei Quer-Druckbeanspruchung σ_{\perp} machen die Dehnungs- und Spannungsüberhöhung zwischen den Fasern sichtbar [69]. (Beanspruchungsrichtung waagrecht)

Zur Dehnung der Matrix würde, wenn die Matrix allein vorhanden wäre, eine hohe Querkontraktion ($-\nu_M \varepsilon_M$) gehören. Sie wird aber in Faserrichtung durch die steifen Fasern nahezu verhindert. So entsteht in der Matrix eine "Zwangsspannung" in Faserrichtung

$$\sigma_{1M} \approx \nu_M (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (5.13)$$

die mit $\nu_M = 0,35$ bis etwa 70% der Matrix-Zugfestigkeit betragen kann, wobei die lokale Dehnungsvergrößerung noch nicht einmal berücksichtigt ist. Wenn sich dann noch eine relativ hohe σ_1 -Spannung überlagert, die eine Spannung in der Matrix mit gleichem Vorzeichen wie diejenige nach Gl. (5.13) bewirkt, kann dies für die Matrix durchaus kritisch werden. Diese letzten Betrachtungen dürften erneut gezeigt haben, wie dringend in den Fragen, die mit dem Einfluß von σ_1 auf den Zfb und der Verspannung von Faser und Matrix in der Faserrichtung zusammenhängen, eine Klärung herbeigeführt werden muß.

Ein vollkommen anders gearteter Effekt, der die Zfb-Festigkeit mindert, tritt in Erscheinung, wenn die σ_1 -Beanspruchung des UD-Verbunds sich dem Fb nähert. Das "Brechen" einer sehr großen Zahl von Elementarfaseren unterliegt natürlich statistischen Gesetzen. Wenn die σ_1 -Spannung etwa die Höhe von 70% derjenigen Spannung erreicht, die zum Faserbruch

in seiner hier benutzten Bedeutung führt, machen sich – besonders durch Schallemission – die ersten Elementarfaserbrüche bemerkbar. Mit weiter steigender σ_1 -Spannung nimmt die Häufigkeit von solchen "vorzeitigen" Elementarfaserbrüchen zu. Mit Sicherheit ist zu erwarten, daß in der Nähe der Elementarfaser-Bruchstellen Ablösungen an der Faser/Matrix-Grenzfläche und auch Mikro-Risse in der Matrix entstehen. Diese schwächen zweifellos den Faser/Matrix-Verbund und setzen dadurch die Zfb-Festigkeiten herab.

Für den Fall der schwellenden Belastung und $\sigma_1 > 0$ liegen gesicherte experimentelle Erfahrungen vor, durch die diese Vorstellungen untermauert werden. Hierbei kann man sich insbesondere auf die bei der Entwicklung der erwähnten schwellend beanspruchten Pkw-Drehrohrfeder stützen [25]. In der äußeren UD-Schicht des zweischichtigen Torsionsrohres tritt eine hohe positive Spannung σ_1 auf. Die dadurch pulsierend zugbeanspruchten Fasern dieser Schicht ermüden, so daß im Laufe der Lebensdauer der Drehfeder zunehmend Brüche einzelner Fasern auftreten. Diese haben zwar makromechanisch gesehen zunächst keinen unmittelbaren Effekt, sie führen aber mit Sicherheit in der Nachbarschaft der Bruchstellen einzelner Fasern zu Mikroschäden. Diese schwächen offenbar den UD-Verbund in seiner Widerstandsfähigkeit gegen Zwischenfaserbruch.

Um solche "Degradationen" rechnerisch zu erfassen, kann man vernünftigerweise annehmen, daß alle in den Zfb-Bedingungen (5.1) bis (5.3) enthaltenen Festigkeitsparameter, $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}, R_{\perp\perp}^A$ durch einen Schwächungsfaktor f_w ($w \hat{=} \text{weakening}$) herabgesetzt werden; und zwar alle im gleichen Maße. Dann läßt sich aus den Bruchfunktionen der Faktor $(f_w)^{-1}$ ausklammern. Multipliziert man anschließend die Bruchbedingungen mit f_w , so nehmen sie folgende Form an:

$$F(\sigma_2, \tau_{21}, R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel} \cdot \dots) = f_w(\sigma_1), \quad (5.14)$$

mit $0 < f_w(\sigma_1) < 1$. Die Bruchkörper behalten ihre Gestalt, werden aber mit dem Schwächungsfaktor $f_w(\sigma_1)$ geometrisch ähnlich verkleinert.

Für $f_w(\sigma_1)$ muß nun eine "vernünftige" Funktion von σ_1 gewählt werden. Wegen all der erwähnten Unsicherheiten hat es keinen Sinn, einen Ansatz zu machen, der allzu "sophisticated" ist. Mangels weitergehender Erfahrungen kann hier auch nur eine Empfehlung für Faser-Kunststoff-Verbunde gegeben werden, und zwar folgende:

Bis $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ wird keine Abminderung der Zfb-Festigkeiten vorgenommen. Zwischen $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ und $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 1$ fällt $f_w(\sigma_1)$ zunehmend steiler vom Wert 1 auf den Wert 0,5 ab.

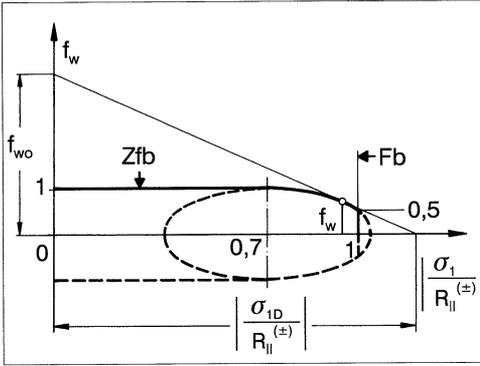


Bild 5.5: Angenommener Verlauf des Schwächungsfaktors $f_w(\sigma_1)$. Variable Hilfsgrößen f_{w_0} und $|f_w'|$ oder σ_{1D} für die iterative Rechnung

In **Bild 5.5** ist ein angenommener Verlauf des Schwächungsfaktors $f_w(\sigma_1)$ über dem Verhältnis $|\sigma_1/R_{||}|$ dargestellt. Bis $|\sigma_1/R_{||}| = 0,7$ ist $f_w = 1$, und von $|\sigma_1/R_{||}| = 0,7$ an fällt f_w nach folgender Ellipsengleichung auf den Wert 0,5 bei $|\sigma_1/R_{||}| = 1$ ab:

$$f_w^2 + \frac{1}{0,12} \left(\left| \frac{\sigma_1}{R_{||}} \right| - 0,7 \right)^2 = 1 \quad \text{für} \left| \frac{\sigma_1}{R_{||}} \right| \geq 0,7. \quad (5.15)$$

Wenn man den hieraus erhaltenen Ausdruck für f_w in die Zfb-Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) einführt, geht deren Homogenität bezüglich der Spannungen verloren, und man kann sie nun nicht mehr zur direkten Berechnung der Anstrengung oder des Reservefaktors benutzen. Eine Möglichkeit, die Homogenität vom Grad 1 wiederherzustellen, besteht darin, die Ellipse abschnittsweise durch Geraden (d.h. durch eine lineare Abhängigkeit von σ_1) zu ersetzen, die mit der Ellipse an der jeweils betrachteten Stelle $|\sigma_1/R_{||}|$ sowohl im Wert f_w als auch in der Steigung f_w' übereinstimmen, s. Bild 5.5. Die Zfb-Bruchbedingungen nehmen dann eine Form an, wie z.B. für die Gl. (5.1) gezeigt:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp||}} \right)^2 + \left(1 - p_{\perp||}^{(+)} \frac{R_{\perp||}^{(+)}}{R_{\perp||}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp||}^{(+)}} \right)^2} + p_{\perp||}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp||}} = f_w(\sigma_1) \quad \text{für Modus A,} \quad (5.16)$$

$$\text{mit } f_w(\sigma_1) = f_{w_0} - |f_w'| \frac{\sigma_1}{R_{||}} = f_{w_0} - \frac{f_{w_0}}{\sigma_{1D}} \sigma_1 = f_{w_0} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right).$$

Hierin ist f_{w_0} der (fiktive) Wert von f_w an der Stelle $|\sigma_1/R_{||}| = 0$, $|f_w'|$ der Absolutwert der Steigung der Tangente an die Ellipse an der Stelle $|\sigma_1/R_{||}|$. Werte für f_{w_0} und $|f_w'|$ errechnen sich aus den folgenden Beziehungen:

$$f_{w_0} = f_w + \left| \frac{\sigma_1}{R_{||}} \right| |f_w'|, \quad (5.17)$$

$$|f'_w| = \left| \frac{d f_w}{d \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right|} \right| = \frac{\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| - 0,7}{0,12 f_w} \quad \text{für } \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| \geq 0,7. \quad (5.18)$$

Damit kann man nun mit den Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3), wenn alle gemäß Gl. (5.16) umgeschrieben werden – wobei sie homogen vom Grad 1 bleiben – die Anstrengung für einen gegebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand durch Iteration berechnen. Für jeden neuen Rechengang bestimmt man die Größen f_{w_o} und $|f'_w|$ mit Hilfe der Gln. (5.17) und (5.18) mit dem im vorhergegangenen Rechengang erreichten Wert $|\sigma_1/R_{\parallel}|$ und dem dazu gehörenden Wert f_w , der sich aus der Ellipsengleichung (5.15) ergibt.

Weitere grundsätzliche Erläuterungen hierzu finden sich im Abschnitt 9.4.1 in Teil III.

5.2 Bruchbedingungen für Faserbruch

Bisher wurde als Faserbruch-Grenze meistens ein Spannungszustand angesehen, bei dem unter kombinierter Beanspruchung eine faserparallele Spannung σ_1 des UD-Verbunds auftritt, die gleich der Längsfestigkeit (Zugfestigkeit $R_{\parallel}^{(+)}$ oder Druckfestigkeit $R_{\parallel}^{(-)}$) aus dem einachsigen Bruchversuch ist, s. Gl. (4.10) auf S. 53. Analog wurde auch eine Bruchbedingung mit der unter kombinierter Beanspruchung auftretenden faserparallelen Dehnung ε_1 des UD-Verbunds und der Längs-Bruchdehnung $e_{\parallel}^{(+)}$ bzw. $e_{\parallel}^{(-)}$ formuliert, s. Gl. (4.15) auf S. 56. Die Wirklichkeit liegt etwa in der Mitte zwischen diesen beiden Ansätzen, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden.

Ausgegangen wird nicht von einer Bruchhypothese für den UD-Verbund, sondern von einer Bruchhypothese für die Fasern; sie lautet:

Die Fasern brechen im UD-Verbund unter einem allgemeinen räumlichen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand, wenn sie die Spannung in ihrer Längsrichtung erreichen, die bei einachsiger $\sigma_{\parallel}^{(+)}$ - bzw. $\sigma_{\parallel}^{(-)}$ -Beanspruchung zum Faserbruch des UD-Verbunds führt.

Hieraus leitet sich auch zunächst noch keine Bruchbedingung für den UD-Verbund, sondern eine Bruchbedingung für die Fasern ab:

$$\sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(+)} \quad \text{für } \sigma_{1F} > 0, \quad (5.19)$$

$$\sigma_{1F} = -R_{\parallel F}^{(-)} \quad \text{für } \sigma_{1F} < 0. \quad (5.20)$$

Es wird also vorausgesetzt, daß für die Fasern die Bruchbedingung der maximalen Normalspannung in Faserlängsrichtung gilt. Zu beachten ist, daß $R_{\parallel F}^{(+)}$ und $-R_{\parallel F}^{(-)}$ nicht an Einzelfasern oder Faserbündeln gemessene Festigkeiten sind, sondern die Zugspannung bzw.

die Druckspannung der Fasern, die beim Bruch des UD-Verbunds erreicht wird, und zwar bei einachsiger Zug- bzw. Druckbeanspruchung mit σ_1 . Linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt, errechnet sich diese folgendermaßen:

$$R_{\parallel F}^{(+)} = \frac{R_{\parallel}^{(+)}}{E_{\parallel}} E_{1F} = e_{\parallel}^{(+)} E_{1F} \quad \text{und} \quad R_{\parallel F}^{(-)} = \frac{R_{\parallel}^{(-)}}{E_{\parallel}} E_{1F} = e_{\parallel}^{(-)} E_{1F}. \quad (5.21)$$

Während $R_{\parallel F}^{(+)}$ wohl die "echte" Faser-Zugfestigkeit (im Verbund) darstellt, ist $R_{\parallel F}^{(-)}$ häufig keine "echte" Druckfestigkeit der Fasern, weil bei $\sigma_{1F} < 0$ das Versagen meistens durch elastische Instabilität – sogenanntes Mikroklicken – der durch die Matrix elastisch gebetteten Fasern erfolgt. Es darf jedoch angenommen werden, daß dieser innere Knickvorgang nicht von einer zusätzlichen Spannung σ_2 beeinflusst wird, sondern allenfalls von einer zusätzlichen Spannung τ_{21} , s. Gl. (5.28). Somit kann $R_{\parallel F}^{(-)}$ zunächst ebenso wie $R_{\parallel F}^{(+)}$ als eine Konstante betrachtet werden. (Anders verhält es sich bei "hydrostatischem" Druck $\sigma_2 = \sigma_3$.)

Es folgt nun die etwas mühselige Herleitung der aus den Bruchbedingungen für die Fasern resultierenden Bruchbedingungen des UD-Verbunds. Wer sich diese ersparen möchte – das Ergebnis ist für die großen Zusammenhänge nicht so wichtig – möge auf S. 75 weiterlesen.

Bereits wenn $\sigma_1 = 0$ ist, aber $\sigma_2 \neq 0$, tritt wegen der unterschiedlichen Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen eine Verspannung von Fasern und Matrix in faserparalleler Richtung ein, bei $\sigma_2 > 0$ ist $\sigma_{1F} < 0$, und bei $\sigma_2 < 0$ ist $\sigma_{1F} > 0$. Dies wird durch das folgende Elastizitätsgesetz mit erfaßt:

$$\varepsilon_{1F} = \frac{\sigma_{1F}}{E_{1F}} - \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2. \quad (5.22)$$

Der Faktor $m_{\sigma F}$ berücksichtigt, daß wegen der unterschiedlichen Moduln von Faser und Matrix (in Richtung von σ_2) die Spannung σ_2 ungleichförmig verteilt ist; im Faserbereich ist sie etwas höher als im Matrixbereich, s. Bild 5.4 auf S. 68. Der Faktor $m_{\sigma F}$ ist der mittlere Vergrößerungsfaktor (magnification factor, m) der Querspannung (Index σ) für die Faser (Index F). Bei GFK dürfte er 1,3 und bei CFK 1,1 betragen.

Die faserparallele Dehnung der Fasern ist gleich derjenigen des Verbunds:

$$\varepsilon_{1F} = \varepsilon_1. \quad (5.23)$$

Damit läßt sich aus Gl. (5.22) die Längs-Spannung σ_{1F} in den Fasern berechnen:

$$\sigma_{1F} = \varepsilon_1 E_{1F} + \nu_{21F} m_{\sigma F} \sigma_2. \quad (5.24)$$

Wenn diese Spannung den gleichen Wert erreicht wie die Spannung in den Fasern beim Bruch des UD-Verbunds unter einachsiger Zug- bzw. Druckspannung σ_1 , "brechen" die Fasern

auch bei kombinierter (σ_1, σ_2) -Beanspruchung. Die Bruchspannungswerte ergeben sich bei vorausgesetztem linear-elastischem Verhalten der Faser als

$$\sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(+)} = e_{\parallel}^{(+)} E_{1F} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(-)} = -e_{\parallel}^{(-)} E_{1F}. \quad (5.25)$$

Damit erhält man als Fb-Bedingung des UD-Verbunds für (σ_1, σ_2) -Beanspruchung

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(+)}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) = 1 \quad \text{für} \quad (\dots) \geq 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(-)}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) = -1 \quad \text{für} \quad (\dots) < 0, \quad (5.27)$$

wenn die Bruchstauchung $e_{\parallel}^{(-)}$ als positiver Zahlenwert angegeben wird.

In einer Erwiderung an *L. J. Hart-Smith* hat *E. C. Edge* [64] auf Versuchsergebnisse hingewiesen, aus denen hervorgeht, daß die faserparallele Druckfestigkeit $R_{\parallel}^{(-)}$ und damit auch die Bruchstauchung $e_{\parallel}^{(-)}$ stark herabgesetzt werden, wenn zu $\sigma_1 < 0$ eine Schubspannung τ_{21} hinzutritt. Dies wird damit erklärt, daß τ_{21} -Beanspruchung das Schubknicken (kinking) der Faser bei faserparalleler Druckspannung begünstigt. *Edge* gibt in [64] eine Interaktionsformel an, die $R_{\parallel}^{(-)} = 0$ werden läßt, wenn τ_{21} die Zwischenfaserbruchgrenze erreicht, also $\tau_{21} = R_{\perp\parallel}$ wird. Dies steht im Widerspruch zu unserer experimentellen Erfahrung, nach der in einer UD-Schicht innerhalb eines Laminats, in der sogar schon viele Risse infolge der τ_{21} -Beanspruchung aufgetreten sind, noch erhebliche σ_1 -Druckspannungen übertragen werden können. Es erscheint deshalb angebracht, eine wesentlich schwächere "Schubkorrektur" als die von *Edge* angegebene vorzusehen, nämlich beispielsweise:

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(-)}} \left| \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) \right| + (10\gamma_{21})^2 = 1 \quad \text{für} \quad (\dots) < 0. \quad (5.28)$$

Bei $(10\gamma_{21})^2$ handelt es sich um einen rein empirischen Ansatz. Für das Rechnen oberhalb von Zfb erscheint es vorteilhaft, einen Ansatz mit γ_{21} statt τ_{21} zu wählen, weil nach der Ribbildung keine "saubere" Angabe über τ_{21} , wohl aber über γ_{21} gemacht werden kann.

In [64] wird auch auf einen merklichen Anstieg von $R_{\parallel}^{(-)}$ mit einem gleichzeitig wirkenden hydrostatischen Druck $\sigma_2 = \sigma_3$ hingewiesen. Ob solche Effekte auch bei $\sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ existieren, ist noch ungewiß. Deshalb sollte auf die Formulierung irgendwelcher über die obigen Gleichungen hinausgehenden Interaktionen zwischen σ_1 und σ_2 beim Faserbruch vorerst verzichtet werden.

Eingangs wurde schon erwähnt, daß bei der Bedingung für Faserbruch die Wirklichkeit zwischen $(\sigma_1/R_{\parallel})^2 = 1$ und $(\varepsilon_1/e_{\parallel})^2 = 1$ liegen würde. Dies kann man jetzt leicht zeigen, indem man die Gln. (5.26), (5.27) etwas umformt, wobei das Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} \sigma_2 \quad (5.29)$$

benutzt wird. Im Vergleich zu den alten Bruchbedingungen (4.10) und (4.15) ergibt sich auf der rechten Seite bei der Größe "1" jeweils ein Korrekturglied, nämlich

$$\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right| = 1 + \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(\pm)}}, \quad (5.30)$$

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right| = 1 - \frac{\nu_{21F} m_{\sigma F} \sigma_2}{E_{1F} e_{\parallel}^{(\pm)}}. \quad (5.31)$$

Man erkennt, daß $(\sigma_1/R_{\parallel}^{(\pm)})$ größer als 1 sein darf, daß aber nicht ganz $(\varepsilon_1/e_{\parallel}^{(\pm)}) = 1$ gilt.

Gl. (5.30) ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1. Somit ergibt sich für die Anstrengung bzgl. Faserbruch-(Fibre Fracture, FF) für positive Faserspannung:

$$\mathcal{E}_{FF} = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(+)}} - \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(+)}} \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0. \quad (5.32)$$

Wenn man Gl. (5.28) ebenfalls mit den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ schreibt, erhält man lineare Terme in σ_1 und σ_2 , aber einen quadratischen in τ_{21} .

$$\text{Mit} \quad \sum L = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(-)}} - \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(-)}}$$

$$\text{und} \quad Q = \left(10 \frac{\tau_{21}}{G_{\perp\parallel}} \right)^2 \quad (5.33)$$

errechnet sich in diesem Fall die Faserbruch-Anstrengung als Lösung einer quadratischen Gleichung gemäß Gl. (4.9) folgendermaßen:

$$\mathcal{E}_{FF} = \frac{1}{2} \left(\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + \left(20 \frac{\tau_{21}}{G_{\perp\parallel}} \right)^2} \right) \quad \text{für } \sigma_1 < 0. \quad (5.34)$$

Für die im nächsten Abschnitt vorgenommene Darstellung von Bruchkörpern im Spannungsraum eignen sich natürlich nur die Formulierungen der Bruchfunktion mit $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$. Beim Rechnen mit nicht-linearen Stoffgesetzen sind jedoch die ursprünglichen Formulierungen mit $\varepsilon_1, \sigma_2, \gamma_{21}$ vorteilhaft. Alle drei Größen sind im Rechenprogramm bei jedem Rechenschritt abrufbar. Wegen des ausgeprägt degressiven Verlaufs der (τ_{21}, γ_{21}) -Kurve wird durch die Benutzung von γ_{21} statt τ_{21} auf einfache Weise erreicht, daß – wie beabsichtigt – die Schubkorrektur bei relativ hohen τ_{21} -Spannungen verstärkt ins Gewicht fällt.

Beim iterativen Rechnen kann es wegen des "Rückkopplungseffekts", der daraus resultiert, daß die Zfb-relevante Spannung τ_{21} die Fb-Anstrengung beeinflusst und die Fb-Anstrengung wiederum Rückwirkungen auf die Zfb-Anstrengung und die daraus abgeleitete

Abminderung von $G_{\perp\parallel s}$ haben kann, zu Konvergenzproblemen kommen. Diesen muß man u.U. durch verkleinerte Schrittweiten begegnen.

In diesem Abschnitt sind eine ganze Reihe von Effekten, die den Fb beeinflussen können, aufgezeigt worden, und zugleich sind analytische Möglichkeiten zu ihrer Erfassung angegeben worden. Die Aufzählung erhebt noch keinen Anspruch auf Vollständigkeit; möglicherweise ist die Schubempfindlichkeit der C-Faser [28,30] noch zu wenig beachtet worden. Vieles muß noch durch mühselige experimentelle Kleinarbeit geklärt werden. Bis dahin spricht nichts dagegen, mit der uralten Fb-Bedingung $(\sigma_1/R_{\parallel})^2 = 1$ zu arbeiten. Die Abweichung gegenüber der Gl. (5.30) bleibt normalerweise unter 5%.

Im übrigen bereitet aber das Rechnen mit den hier hergeleiteten Fb-Bedingungen (5.26) und (5.27) außer vielleicht bei der Bestimmung von σ_2 oberhalb der Zfb-Rißbildungsgrenzen keine besonderen Schwierigkeiten. Will man jedoch mit kleinstmöglichem Aufwand von den hier vorgestellten Ergebnissen Gebrauch machen, empfiehlt sich eine Mittelwertbildung aus den Fb-Bedingungen (4.10) und (4.15):

$$\frac{1}{2} \left(\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right| \right) = 1. \quad (5.35)$$

Man scheut sich noch etwas, die verfeinerten Bruchbedingungen nach (5.26) und (5.28) zu empfehlen, solange die zugrundeliegende Bruchhypothese der maximalen Faser-Längsspannung noch nicht gesichert erscheint. Heftig widersprochen wird dieser Hypothese durch *Hart-Smith* [28], der eine merkliche Abnahme von $R_{\parallel F}$ für den Fall annimmt, daß die Faser etwa gleich großen Längs- und Querdehnungen mit ungleichem Vorzeichen ausgesetzt ist. Dies bedarf noch der experimentellen Klärung. Hierauf wird im Abschnitt 11.3 und in [65] näher eingegangen. Die Hauptsache bleibt vorerst, daß überhaupt eine eigenständige Fb-Bedingung benutzt wird.

5.3 Bruchkörper

Ob der erste Bruch, der in einer UD-Schicht eintritt, ein Zfb oder ein Fb ist, hängt von den Spannungsverhältnissen ab. Dies wird bei näherer Betrachtung der aufgestellten Bruchbedingungen deutlich. In den Fb-Bedingungen dominiert σ_1 , dagegen erscheinen σ_2 und τ_{21} nur in einem Korrekturterm. Bei den Zfb-Bedingungen verhält es sich umgekehrt, in diesen haben σ_2 und τ_{21} einen starken Einfluß und σ_1 hat in einem weiten Bereich zunächst gar keine und erst bei Annäherung an den Fb eine spürbare Auswirkung auf den Zfb. Aus dem eingangs in Kapitel 2 geschilderten Bruchgeschehen in Laminaten kann man schließen, daß in einer Schicht innerhalb eines Laminats zuerst Zfb und später auch noch Fb eintreten kann, während ein Fb gleichzeitig ein "katastrophaler" Zfb ist. Für den Bruchkörper bedeutet dies,

daß die Fb-Flächen – es gibt eine für Zug ($\sigma_1 \geq 0$) und eine für Druck ($\sigma_1 < 0$) – vom Zfb-Körper etwas wegschneiden und so seinen Gültigkeitsbereich begrenzen. Hingegen besitzen die Fb-Flächen auch außerhalb des Zfb-Körpers noch ihre Gültigkeit, nämlich für Fb nach eingetretener Zf-Rißbildung. Dabei kann an dieser Stelle noch nicht erklärt werden, woher man oberhalb der Rißbildungsgrenze den in die Fb-Bedingung einzusetzenden Wert von σ_2 nimmt. Bei der Schubkorrektur gibt es ein solches Problem nicht, weil sie von vornherein mit γ_{21} statt mit τ_{21} formuliert wurde.

Der Einfluß frühzeitiger Elementarfaserbrüche wurde ursprünglich in (Abschnitt 5.1.3) von $|\sigma_1/R_{||}|$ abhängig gemacht. Nach den inzwischen durchgeführten Betrachtungen zum Faserbruch erscheint es jedoch sehr viel einleuchtender, $|\sigma_1/R_{||}|$ in den Beziehungen für $f_w(\sigma_1)$ durch die Fb-Anstrengung \mathcal{E}_{FF} zu ersetzen, weil der Fb und seine Vorstufen bei genauerer Betrachtung nicht nur von σ_1 abhängen. Dies ist physikalisch sinnvoll und erleichtert außerdem das praktische Rechnen, aber es erschwert die Visualisierung, denn man möchte natürlich den Bruchkörper im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum darstellen.

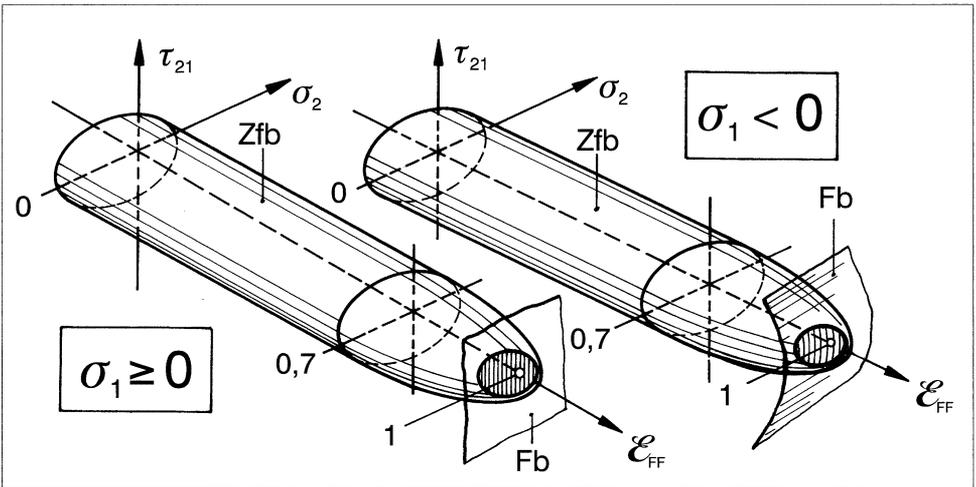


Bild 5.6: Bruchkörper nach Gl. (4.6) für Zfb und (4.10) für Fb für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung bei $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_1 < 0$, dargestellt in Abhängigkeit von der Fb-Anstrengung \mathcal{E}_{FF}

Bild 5.6 zeigt zunächst die Darstellung des Bruchkörpers im $(\mathcal{E}_{FF}, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum. Für den Zfb-Körper gelten sinngemäß die Ausführungen des Abschnitts 5.1.3; an die Stelle von $|\sigma_1/R_{||}|$ tritt \mathcal{E}_{FF} . Im Bereich $\mathcal{E}_{FF} \geq 0,7$ sind die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven in Schnitten $\mathcal{E}_{FF} = \text{const.}$ geometrisch ähnliche Verkleinerungen der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\mathcal{E}_{FF} = 0$. Da es definitionsgemäß nur positive Anstrengungswerte gibt, muß auch der Bereich negati-

ver Faserspannungen über positiven \mathcal{E}_{FF} -Werten aufgetragen werden. In diesem Fall macht sich die Schubkorrektur dadurch bemerkbar, daß die Fb-Fläche nicht wie bei positiver Faserspannung eine zur (σ_2, τ_{21}) -Ebene parallele Ebene ist, sondern eine einfach, und zwar parabelförmig, gekrümmte Fläche.

In **Bild 5.7** ist die übliche Darstellung des Bruchkörpers im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum vorgenommen worden. Gemäß Gl. (5.26) ist die Fb-Fläche für positive Faserspannung eine auf der (σ_1, σ_2) -Ebene senkrecht stehende und um einen kleinen Winkel (von etwa 5° bis 8° bei gleichen Maßstäben für σ_1 und σ_2) gegenüber der (σ_2, τ_{21}) -Ebene gedrehte Ebene. Nun sind die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven auf solchen, um den gleichen Winkel gedrehten Schnittebenen geometrisch ähnliche Verkleinerungen der Bruchkurve für $\mathcal{E}_{FF} = 0$, die durch die τ_{21} -Achse verläuft. Bei negativer Faserspannung erschwert die Schubkorrektur die geometrische Darstellung; die Durchdringungskurve von Zfb-Fläche und Fb-Fläche ist keine ebene Kurve.

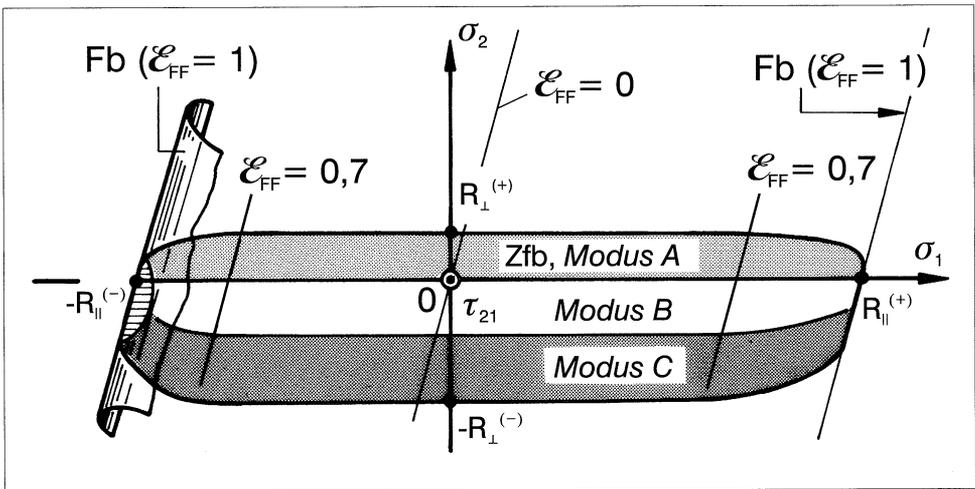


Bild 5.7: Bruchkörper nach Gln. (5.1) bis (5.3) für Zfb und (5.26) und (5.28) für Fb für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung, dargestellt im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum

Bemerkenswert ist, daß die Bruchfläche des UD-Verbunds sich bei Benutzung der neuen Zfb-Bedingungen aus 5 Teil-Bruchflächen zusammensetzt, nämlich 3 Flächen für die Zfb-Modi A, B, C (die beiden Modus B-Flächen nur einmal gezählt) und je einer Fb-Fläche für positive und negative Faserspannung. Demgegenüber stellen die vielen heute noch gebräuchlichen globalen Bruchbedingungen wie diejenige von *Tsai, Wu* eine einzige Ellipsoid-Oberfläche dar, so als ob es nur einen einheitlichen Bruch-Modus gäbe.

5.4 Berücksichtigung von Eigenspannungen

Bei der Festigkeitsanalyse von Laminaten müssen in vielen Fällen die Eigenspannungen berücksichtigt werden, die durch die gegenseitige Verspannung der Einzelschichten bei Änderung der Temperatur und der Feuchtekonzentration entstehen. Dabei muß man allerdings gegen eine Grundvoraussetzung verstoßen, die bei der Aufstellung von Bruchbedingungen getroffen wird, nämlich, daß die beteiligten Spannungen stets in einem unveränderlichen Verhältnis zueinander verbleiben, d.h. daß der Spannungszustandsvektor unter Beibehaltung seiner Richtung aus dem Koordinatenursprung des Spannungsraumes herauswächst. Auch bei der experimentellen Ermittlung von Festigkeiten und Bruchkurven ist man stets bemüht, diese Voraussetzung zu erfüllen, weil eine Abhängigkeit der Ergebnisse vom Lastpfad zu erwarten ist [66]. Man ist demzufolge normalerweise gezwungen, stets mit der gleichen Bruchkurve bzw. dem gleichen Bruchkörper zu rechnen, ob nun Eigenspannungen vorhanden sind oder nicht. Solange die Eigenspannungen gegenüber den zum Bruch führenden Spannungen relativ klein bleiben, dürfte der Fehler sich in tolerierbaren Grenzen halten.

Beim Vorhandensein von Eigenspannungen kann man die Begriffe Reservefaktor und Anstrengung nicht mehr in der gewohnten Weise anwenden. Dies soll durch **Bild 5.8** veranschaulicht werden. Um das Grundsätzliche zu zeigen, genügt es, einen einfach darstellbaren (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustand zu betrachten. Gezeigt sind zwei gleich lange Spannungsvektoren $\{\sigma\}^{(l)}$. (l steht für lastbedingt, load dependent) Beide rühren von einer gleich hohen Belastung her, aber einmal geht $\{\sigma\}^{(l)}$ vom Koordinatenursprung aus, während im anderen Fall $\{\sigma\}^{(l)}$ sich einem bestehenden Eigenspannungszustand $\{\sigma\}^{(r)}$ (residual stress, r) überlagert, wodurch der Spannungsvektor $\{\sigma\}$ entsteht. Ohne Eigenspannungen ergibt sich der Reservefaktor f_{Res} in gewohnter Weise. Wenn aber Eigenspannungen vorliegen, kann man nur einen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen $\{\sigma\}^{(l)}$ definieren:

Der Reservefaktor der lastbedingten Spannungen ist derjenige positive Faktor, mit dem alle lastbedingten Spannungen erhöht werden müßten, damit Bruch eintreten würde.

Während es sinnvoll ist, einen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen einzuführen, wäre es unsinnig, bei Existenz von Eigenspannungen von einer "Werkstoff-Anstrengung" der lastbedingten Spannungen $\{\sigma\}^{(l)}$ zu sprechen, denn es kann ja nicht nur ein Teil der im Werkstoff wirkenden Spannungen, nämlich der lastbedingte, für dessen Anstrengung maßgeblich sein. Bei Berücksichtigung der Eigenspannungen wird unter "Anstrengung" nicht der Kehrwert $(f_{Res}^{(l)})^{-1}$ verstanden, sondern der Kehrwert des Faktors, um den sich der Spannungsvektor $\{\sigma\} = \{\sigma\}^{(r)} + \{\sigma\}^{(l)}$ unter Beibehaltung seiner Richtung verlängern müßte, damit Bruch eintreten würde, vgl. (1) \rightarrow (2) und (1) \rightarrow (3) in Bild 5.8.

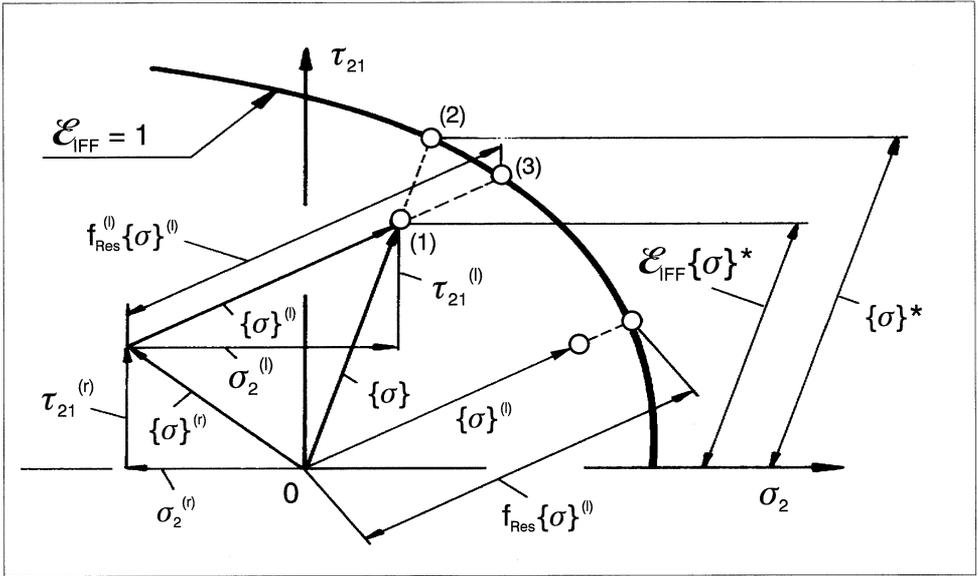


Bild 5.8: Zur Definition des Reservefaktors $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen und der Anstrengung \mathcal{E}

Im Falle des hier betrachteten ebenen Spannungszustands setzten sich die herrschenden Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ folgendermaßen zusammen:

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(r)} + \sigma_1^{(l)} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(r)} + \sigma_2^{(l)} \quad ; \quad \tau_{21} = \tau_{21}^{(r)} + \tau_{21}^{(l)}. \quad (5.36)$$

Die zum Bruch führenden Spannungen ergeben sich dann mit den als konstant angenommenen Eigenspannungen, den momentan herrschenden "Last-Spannungen" und dem Reservefaktor der lastbedingten Spannungen folgendermaßen:

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)} \quad ; \quad \tau_{21} = \tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)}. \quad (5.37)$$

Der besseren Übersichtlichkeit halber wird zunächst an einer einfachen konventionellen Bruchbedingung, nämlich Gl. (4.6) von S. 47 gezeigt, was sich ändert, wenn Eigenspannungen berücksichtigt werden.

Mit den Abkürzungen $a = \frac{1}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} \quad ; \quad b = \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) \quad ; \quad c = \frac{1}{R_{\perp}^2}$

schreibt sie sich folgendermaßen: $a \sigma_2^2 + b \sigma_2 + c \tau_{21}^2 = 1$.

Ein Spannungszustand $\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}$; $\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)}$

soll die Bruchbedingung erfüllen. Die ergibt eine quadratische Gleichung für $f_{Res}^{(l)}$:

$$\begin{aligned} (f_{Res}^{(l)})^2 \left[a (\sigma_2^{(l)})^2 + c (\tau_{21}^{(l)})^2 \right] + f_{Res}^{(l)} \left[2a\sigma_2^{(r)}\sigma_2^{(l)} + b\sigma_2^{(l)} + 2c\tau_{21}^{(r)}\tau_{21}^{(l)} \right] + \\ + a (\sigma_2^{(r)})^2 + b\sigma_2^{(r)} + c (\tau_{21}^{(r)})^2 = 1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die letzten drei Terme auf der linken Seite der Gleichung weisen darauf hin, daß auch der Eigenspannungszustand allein schon eine (eigentlich Langzeit-)Bruchgefahr darstellt. Beachtenswert ist auch, daß $\tau_{21}^{(l)}$ jetzt in der Bruchbedingung nicht nur quadratisch, sondern auch linear auftritt. Jetzt nimmt demnach das Vorzeichen der Schubspannung Einfluß auf das Ergebnis. Dies kann man sich auch anhand von Bild 5.8 vergegenwärtigen.

Mit den neuen Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) erhält man auf gleiche Weise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\perp\parallel}^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \left[f_{w_o} - \frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \right]^2 \quad \text{für Modus A,} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\perp\parallel}^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \left[f_{w_o} - \frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \right]^2 \quad \text{für Modus B,} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{[2(1+p_{\perp\parallel}^{(-)})R_{\perp\parallel}]^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \frac{1}{(R_{\perp}^{(-)})^2} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \left[\frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - f_{w_o} \right] \quad \text{für Modus C.} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Wenn $\sigma_1 = 0$ ist oder nicht berücksichtigt wird, ist $f_{w_o} = 1$ und $f_w' = 0$ zu setzen! Die Gln. (5.39) bis (5.41) stellen in jedem Fall quadratische Gleichungen für $f_{Res}^{(l)}$ dar.

Nun wird, wie auch aus dem Bild 5.8 hervorgeht, die Entscheidung darüber, welcher Bruch-Modus eintritt, erschwert. Dies ist durch den Ausgangspunkt des Lastspannungsvektors (= Spitze des Eigenspannungsvektors) und seine Richtung vorbestimmt. Es ist also eine kleine "geometrische" Rechenoperation nötig, um zu entscheiden, welcher Modus auftritt.

6 Degradation nach der Reißbildung

6.1 "Verschmieren" der Risse

Anfang der 60-er Jahre begann in Deutschland eine intensive Entwicklung von GFK-Hochleistungs-Segelflugzeugen. Aus der extremen Schlankheit der Tragflügel dieser Flugzeuge, die aus **Bild 6.1** erkennbar wird, resultieren außergewöhnlich hohe Festigkeitsanforderungen, insbesondere natürlich im Bereich der Flügelwurzel beim Übergang in den Rumpf.

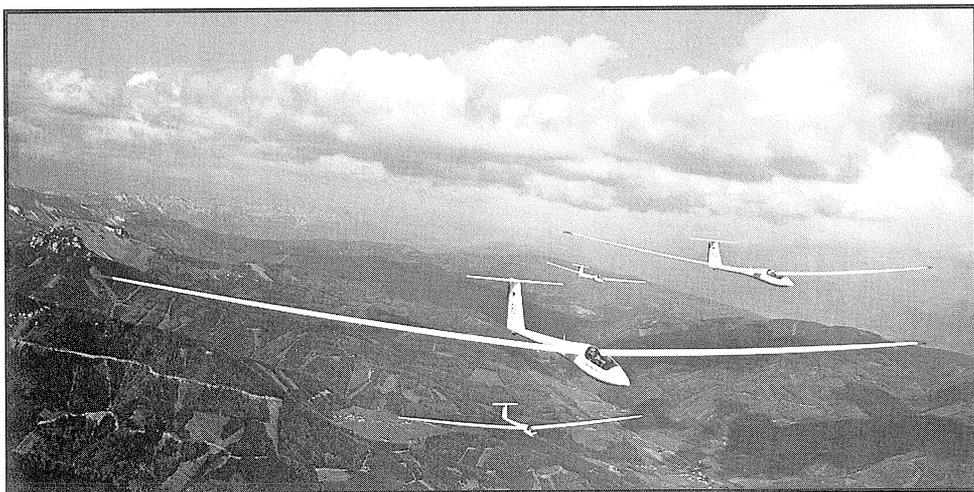


Bild 6.1: Bei modernen Hochleistungs-Segelflugzeugen resultieren aus der ungewöhnlichen Schlankheit der Tragflügel extreme Festigkeitsanforderungen.

Nachdem anfänglich mittragende Sandwichkerne aus Balsaholz an der Lastaufnahme beteiligt waren, ging man bald dazu über, die gesamte Primärstruktur, Tragflügel, Rumpf und Leitwerk, in reiner Faserverbundbauweise auszuführen. Bei der Entwicklung und der Festigkeits-Erprobung der frühen GFK-Flugzeuge stellte sich heraus, daß in der Festig-

keitsanalyse der Lamine noch eine riesige Lücke klaffte, und zwar für den sehr weiten Beanspruchungsbereich zwischen beginnender Ribbildung und dem Totalbruch. Zwar war die klassische Laminat-Theorie 1960 schon in ihren Ansätzen vorhanden – sie wurde damals zur Unterscheidung von der Netztheorie "Kontinuumstheorie" genannt – aber man sah keine Möglichkeit, mit ihr über die Entstehung der ersten Risse hinaus zu rechnen, weil dann ja kein "Kontinuum" mehr existierte. Die ältere Netztheorie konnte zwar gewisse Anhaltspunkte für das Tragverhalten der "total gerissenen" Struktur geben, aber insgesamt war die Situation äußerst unbefriedigend, denn der "Nach-Ribbildungs-Bereich" erwies sich als um ein Vielfaches größer als der ribfrei ertragbare Lastbereich. Dies veranlaßte den Autor 1968/69 zur Suche nach einer Abhilfe, die in erster Linie den Bedürfnissen der GFK-Konstruktionspraxis gerecht werden sollte [1,2]. Die folgende in [2] getroffene Aussage ist aber auch heute noch Grundlage aller realistischen "Post-Failure"-Theorien für Lamine:

"Es liegt nahe, ebenso wie man bisher schon in den einzelnen UD-Schichten die Auswirkung der unterschiedlichen Moduln von Fasern und Harz auf die Elastizität der UD-Schicht durch "Verschmieren" der Faser/Harz-Struktur zu einem homogenen Kontinuum makroskopisch – d.h. im Mittelwert richtig – erfaßte, auch die Risse zu "verschmieren" und so jedenfalls makroskopisch die Auswirkung der Risse auf die Steifigkeit der "gerissenen" UD-Schicht und damit auf die Steifigkeit des ganzen Mehrschichtenverbunds rechnerisch zu erfassen. Die Risse äußern sich dann in einer Abminderung einiger Elastizitätsgrößen der betroffenen UD-Schicht."

Genau genommen werden auch schon bei der Spannungsanalyse unterhalb der Ribbildungsgrenze, wenn nicht-lineare Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge berücksichtigt werden, nicht nur Fasern und Matrix verschmiert, sondern auch Risse. In diesem Fall handelt es sich allerdings um unsichtbare "Mikrorisse", denn diese verursachen im wesentlichen die Nichtlinearität, vgl. Bilder 1.3 auf S. 5 und 3.7 auf S. 39. Das kann man unter anderem daraus schließen, daß bei einem der Entlastung folgenden zweiten Belastungszyklus bis zur gleichen Lasthöhe keine Nichtlinearität und Schädigungshysterese mehr auftritt [67].

Natürlich stellt das Verschmieren von "Makrorissen", die eine Schicht vollständig durchtrennen, ein wesentlich gröberes Vorgehen dar als das Verschmieren von Mikrorissen. Man muß sich darüber im klaren sein, daß die bei dieser Verfahrensweise unvermeidliche Vernachlässigung der Spannungskonzentration an den Ribspitzen gravierend sein kann, insbesondere bei Laminaten, die nur aus sehr wenigen, dicken Schichten bestehen. Solche kommen allerdings sehr selten vor und erfordern ggf. besondere Maßnahmen wie das Einfügen einer "Ribstopperschicht", s. Bild 2.4 auf S. 17. Für die vorherrschenden fein- und vielschichtigen Lamine in Bauteilen stellt das Verschmieren der Zwischenfaser-Risse sicher eine "vernünftige" Annäherung an die Wirklichkeit dar. Vermutlich ist sie für die Konstruktionspraxis

sogar die einzige Vorgehensweise, die noch einfach genug handhabbar und doch hinreichend wirklichkeitsnah ist. Auf die lokale Kerbwirkung wird im Abschnitt 11.1 nochmals eingegangen. Hier geht es zunächst darum, die Last-Umverteilung unter den Schichten im Laminat "im Mittel richtig" berechenbar zu machen. Durch das Verschmieren der Risse wird erreicht, daß der Algorithmus der schichtenweisen Spannungsanalyse auch nach eingetretener Rißbildung weiterbenutzt werden kann. Die diskontinuierlich mit Rissen durchsetzten Schichten werden durch ein homogenes Kontinuum ersetzt, dessen Eigenschaften – in erster Linie die "Quer-Steifigkeiten" – sich abhängig vom Ausmaß der Rißbildung stetig ändern. Im Sinne der Damage Mechanics stellt sich somit erstens die Frage nach dem Evolutionsgesetz, welches das Ausmaß der Rißbildung bestimmt (Bruchmechanik!), und zweitens nach dem zu einer bestimmten Rißdichte gehörenden Steifigkeitsverlust. Für den Spezialfall der reinen σ_2 -Zugbeanspruchung liegen bereits analytische Lösungen vor, die auch weitgehend experimentell bestätigt werden konnten [68]. Für die Bruchanalyse im Zuge einer Bauteilentwicklung müssen aber zumindest alle denkbaren $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen in Betracht gezogen werden, so daß man in der Konstruktionspraxis wohl noch für einige Zeit mit phänomenologischen Modellen wird vorliebnehmen müssen.

6.2 Abminderungsfunktion für Elastizitätsgrößen

6.2.1 Bruch-Modus A

Aus dem Erscheinungsbild der Zf-Rißbildung und aufgrund mikromechanischer Vorstellungen vom Kraftfluß im Verbund ergibt sich, daß der Elastizitätsmodul E_{\parallel} in der Faserrichtung einer UD-Schicht nicht nennenswert durch die faserparallelen Risse beeinflusst wird.

Der Kraftfluß bei $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung wird an jedem Riß unterbrochen, so daß er im Rißbereich über die Nachbarschichten umgeleitet werden muß. Folglich müssen bei verschmierten Rissen die "Quer-Moduln" $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$, wenn sie die Quersteifigkeiten im Mittel richtig angeben sollen, abgemindert werden. Auch der Mechanismus der Querkontraktion, der sich in der Querkontraktionszahl $\nu_{\perp\parallel}$ (es handelt sich um die größte) ausdrückt, wird durch die Risse verändert. Die mikromechanische Berechnung von $\nu_{\perp\parallel}$ geschieht mit einer einfachen "Mischungsregel", die auf der Annahme basiert, daß bei der Querkontraktion von Fasern und Matrix keine Hohlräume entstehen. Solche sind aber durch die Risse vorgegeben; die Querkontraktion ($-\nu_{\perp\parallel}\varepsilon_1$) erfolgt nicht mehr "en bloc", sondern streifenweise, wobei sich die Risse öffnen. Mit fortschreitender Rißbildung wird sich folglich der Wert von $\nu_{\perp\parallel}$ verkleinern; bei einem reinen Netzwerk ist $\nu_{\perp\parallel} = 0$. Bei der Abminderung von $E_{\perp S}$, $G_{\perp\parallel S}$ und $\nu_{\perp\parallel}$ soll als extremer Grenzfall die Situation des reinen Netzwerks erreichbar sein.

In [2] wurde für die durch kombinierte $(\sigma_{\perp}^{+}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung hervorgerufene Bruchart nach Modus A folgende Annahme getroffen:

E_{\parallel} bleibt von der Rißbildung unbeeinflusst. $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}, \nu_{\perp\parallel}$ werden in gleichem Maße mit einem Faktor η abgemindert, der von der Rißdichte abhängt.

Das Problem bestand darin, bei Unkenntnis des Zusammenhangs zwischen Rißdichte und mittlerem Steifigkeitsverlust und unbekanntem Evolutionsgesetz der Rißbildung einen Ansatz für η zu finden. Eine Lösung ergab sich aus der folgenden Überlegung: Wenn man mit einer Zfb-Bruchbedingung – bei zunächst vorausgesetztem linear-elastischen Verhalten – \mathcal{E}_{IFF} -Werte > 1 errechnet, bedeutet dies, daß die Zfb-Grenze überschritten wurde, und zwar um so mehr, je höher der Wert für \mathcal{E}_{IFF} ausfällt. Grundsätzlich kann man also die ”**Überanstrengung**” ($\mathcal{E}_{IFF} - 1$) als eine Variable benutzen, welche die Rißdichte und damit die Modulabminderung steuert. Anstrengungswerte $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ kann man auch als **Überschreitungsgrad** der Rißbildungsgrenze bezeichnen. Gesucht also ist eine Abminderungsfunktion

$$\eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF} - 1) \quad \text{oder} \quad \eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF}). \tag{6.1}$$

Für $\mathcal{E}_{IFF} = 1$ ist $\eta = 1$ und für $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ gilt $0 \leq \eta < 1$. Die Parameter der Funktion müssen natürlich durch geeignete Versuche an verschiedenen Laminaten und bei unterschiedlichen Belastungen ermittelt werden. Generell kann man aber bereits aus experimenteller Erfahrung vorhersagen, daß η nach dem Überschreiten der Rißbildungsgrenze zunächst nur sehr schwach abfällt ($\hat{=}$ geringe Rißbildungsrate), dann folgt ein steiler Abfall ($\hat{=}$ gehäufte Rißbildung) und anschließend wieder ein abgeflachter Verlauf ($\hat{=}$ abebbende Rißbildung).

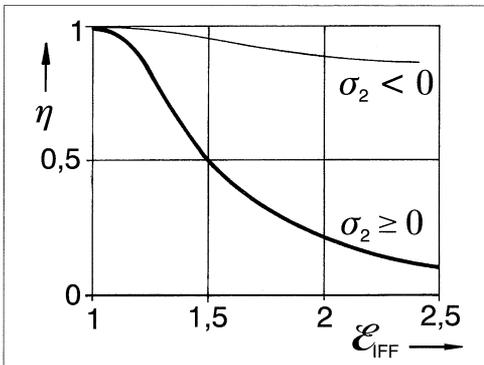


Bild 6.2: Abminderungsfaktor η für die Elastizitätsgrößen $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}, \nu_{\perp\parallel}$ in Abhängigkeit vom ”Überschreitungsgrad” $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ des Beginns der Zwischenfaserrißbildung ($\mathcal{E}_{IFF} = 1$) nach [2]

Bild 6.2 gibt den in [2] gewählten Verlauf von $\eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF})$ wieder. Aus dem Bild geht auch hervor, daß bei kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung, d.h. bei den Bruch-Modi B und C, keine starke Abminderung erfolgen darf, weil die Risse sich nicht öffnen können und die

Rißflächen sich auch nach dem Zfb berühren und Druckkraft übertragen. Es war erwartet worden, daß nach dem Bekanntwerden dieser Methode vielerorts bei den Bruchversuchen η -Verläufe ermittelt würden, was aber leider bis heute nur vereinzelt geschehen ist.

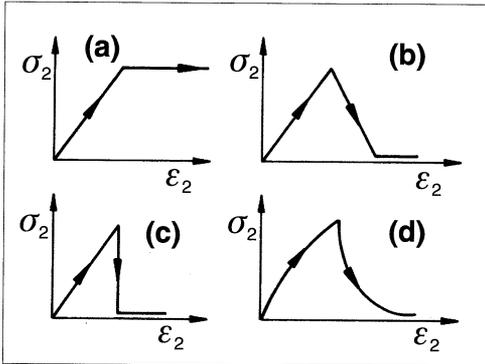


Bild 6.3: "Nach-Bruch-Theorien", zusammengestellt von Nahas [7]: (a) Hahn, Tsai-Methode, (b) Petit, Waddoups-Modell, (c) Chiu-Modell, (d) Nahas-Modell

Wie in [68] kommt auch in der Übersicht von Nahas [7] bei der Erwähnung der Nach-Bruch-Theorien nur der Sonderfall der einachsigen σ_2 -Zugbeanspruchung vor. **Bild 6.3** gibt die in [7] erwähnten Modellannahmen für den Verlauf der über der Länge gemittelten Spannung σ_2 bei fortschreitender Rißbildung wieder. Keiner der gezeigten Verläufe erscheint realistisch. Gegen die Annahme einer nach dem Rißbildungsbeginn konstant bleibenden mittleren Spannung σ_2 spricht die Vorstellung, daß an jeder Rißstelle die örtliche Spannung zu "null" wird, und daß es einer gewissen Anlaufstrecke bedarf, bis sich die Spannung wieder so weit aufgebaut hat, daß erneut die Festigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ erreicht ist, und somit ein neuer Riß entstehen kann. Wäre $R_{\perp}^{(+)}$ eine Konstante, so müßte demnach die mittlere Spannung σ_2 nach dem Rißbildungsbeginn kleiner als $R_{\perp}^{(+)}$ sein. Nun ist $R_{\perp}^{(+)}$ allerdings in Wirklichkeit über die Länge der Schicht statistisch verteilt, so daß zuerst Risse an "schwächeren" Stellen und später an "festeren" Stellen entstehen. So kann man sich durchaus vorstellen, daß nach der Entstehung der allerersten Risse, die auch von Fehlstellen ausgelöst sein können, die über die Länge gemittelte Spannung σ_2 eine Weile konstant bleibt oder sogar noch etwas ansteigt, um erst später abzufallen. Die übrigen σ_2 -Verläufe enden alle mehr oder weniger abrupt bei $\sigma_2 = 0$. Dies ist nun wiederum nicht mit der Vorstellung vom charakteristischen Schädigungszustand (CDS) in Einklang zu bringen, denn wenn sich nach dem Erreichen des CDS keine neuen Risse mehr bilden können, bedeutet dies, daß die gerissene Schicht von nun an eine konstante Reststeifigkeit behält und somit die Spannung mit weiter wachsender Dehnung wieder proportional zu den Verzerrungen ansteigen muß.

Experimente zur Ermittlung des tatsächlichen Steifigkeitsabfalls nach Einsetzen der Rißbildung müßten u.a. an $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten durchgeführt werden, bei denen die 90° -Schicht erheblich dicker ist als die 0° -Schichten. Einige solche Versuche mit empfindlicher Deh-

nungsaufnahme sind in den 60-er Jahren am *Deutschen Kunststoff-Institut* in Darmstadt durchgeföhrt worden [69], wenn auch zu einem anderem Zweck. Dennoch kann man aus der Abb. 17 in [69] einige Anhaltspunkte zum Verlauf der mittleren σ_2 -Spannung entnehmen.

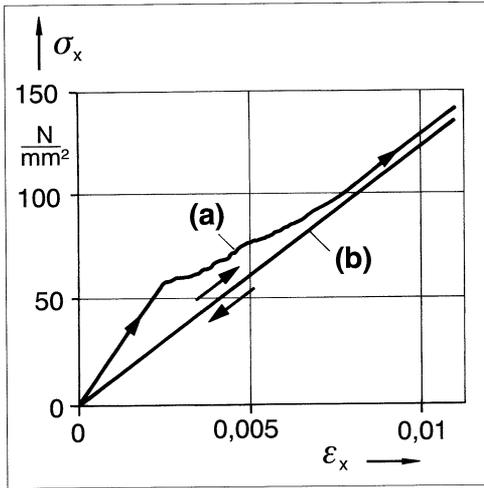


Bild 6.4: (a) Spannungs,Dehnungs-Diagramm eines $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Laminats (Verhältnis von Dicke der 90° -Schicht zur Gesamtdicke 0,75) bei einachsiger Zugbeanspruchung in Richtung der 0° -Fasern bis zu einer Dehnung $\epsilon_x = 1,1\%$ (b) Spannungs, Dehnungslinie für nur noch allein tragende 0° -Schicht

Bild 6.4 gibt Einzelheiten aus der erwähnten Abb. 17 in etwas vereinfachter Form wieder. Man kann deutlich erkennen, daß σ_2 nicht im Mittel konstant bleibt, denn sonst müßte die Spannungs,Dehnungs-Linie des Laminats nach dem "Knie", das den Ribbildungsbeginn anzeigt, parallel zu der Linie verlaufen, die sich bei nur noch allein tragender 0° -Schicht ergibt. Denn für die Spannung σ_x des Laminats gilt mit den Schichtdicken t

$$\sigma_x(t_{0^\circ} + t_{90^\circ}) = \sigma_{1_{0^\circ}}t_{0^\circ} + \sigma_{2_{90^\circ}}t_{90^\circ} . \tag{6.2}$$

Aus dem Abstand der aufgenommenen (σ_x, ϵ_x) -Linie und der Linie für die allein tragende 0° -Schicht erhält man also Aufschluß über den Verlauf von $\sigma_{2_{90^\circ}}$ in Abhängigkeit von $\epsilon_{2_{90^\circ}} = \epsilon_x$, wobei in diesem Fall die Zfb-Anstrengung der 90° -Schicht näherungsweise proportional zu ϵ_2 ist. Ob ein CDS mit der zugehörigen Reststeifigkeit der 90° -Schicht auftritt, kann nicht mit Sicherheit festgestellt werden; man gewinnt den Eindruck, daß bei einer Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF} \approx 4,5$ noch eine kleine Reststeifigkeit ($\leq 10\%$) vorhanden ist.

Aufgrund des allgemeinen Wissens über den Ablauf der fortschreitenden Ribbildung und der Anhaltspunkte aus Bild 6.4 gelangt man zu einem Ansatz für die Elastizitätsgrößen-Abminderungsfunktion $\eta(\mathcal{E}_{IFF})$ für den Bruch-Modus A der folgenden Art:

$$\eta = \frac{1 - \eta_r}{1 + c(\mathcal{E}_{IFF} - 1)^\xi} + \eta_r . \tag{6.3}$$

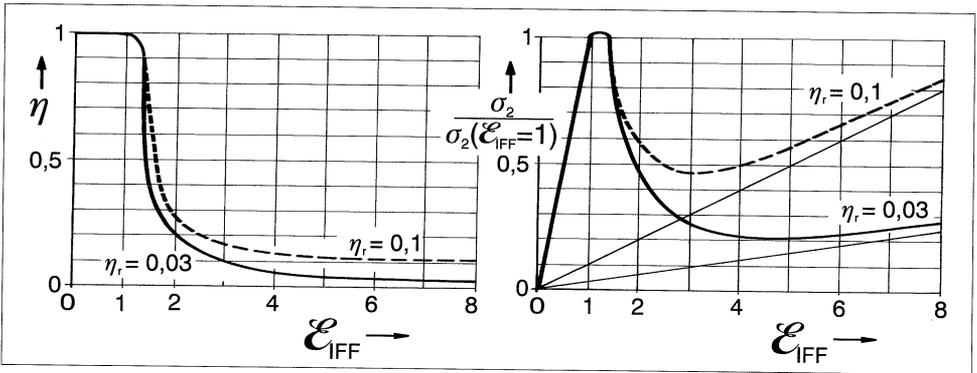


Bild 6.5: (a) Abminderungsfaktor η nach Gl. (6.3) mit $c = 4$ und $\xi = 2$. (b) Verlauf der mittleren, "verschmiert" betrachteten Spannung σ_2 in der 90° -Schicht eines $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Laminats, linear elastisch gerechnet. Die mittlere Spannung σ_2 ist auf die beim Erreichen der Rißbildungs-Grenze auftretende Spannung σ_2 (Zfb) bezogen.

Durch die Größe η_r wird erfaßt, daß eine kleine Reststeifigkeit erhalten bleibt. Die Konstante c und der Exponent ξ dienen zur Anpassung an Versuchsergebnisse. Die Messungen nach Bild 6.4 gestatten nur eine sehr unzulängliche Anpassung; $c = 4$ und $\xi = 2$ erscheinen "vernünftig". Mit diesen Werten sind die in **Bild 6.5** dargestellten Verläufe berechnet worden, die allerdings nur exemplarisch betrachtet werden sollten. Bemerkenswert ist vor allem der außerordentliche starke Einfluß des Wertes η_r auf die mittlere Spannung σ_2 . Er beeinflusst die Spannungsaufnahme der gerissenen Schicht bei hohen "Überschreitungsgraden" der Rißbildungsgrenze sehr stark. Eine 8-fache Überschreitung einer Zfb-Dehnungsgrenze von 0,3 % ist bei $(0^\circ, 90^\circ)$ -GFK-Laminaten durchaus denkbar. Solange keine verlässlichen Messungen über Reststeifigkeiten vorliegen, kann allenfalls empfohlen werden, bei GFK mit $\eta_r \approx 0,03$ bis 0,05 zu rechnen (vorzugsweise mit 0,03 für annähernde Spannungskonstanz auf niedrigem Niveau) und bei CFK $\eta_r = 0$ zu setzen, denn bei CFK kann kaum eine Sättigung mit Rissen festgestellt werden [68]. Dies mag allerdings auch daran liegen, daß ganz so weite Überschreitungen der Rißbildungsgrenze wie bei GFK-Laminaten bei CFK-Laminaten wegen der meistens etwas niedrigeren Faser-Bruchdehnung nicht realisierbar sind.

Versuche zur Klärung des Nach-Zfb-Verhaltens bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung sind viel schwieriger als die beschriebenen Versuche an $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten, weil zur Rißbildung relativ große Schubverformungen $\gamma_{21} \approx 0,04$ bis 0,05 gehören, s. Bild 3.3 auf S. 35. Man kann am ehesten an rohrförmige Probekörper mit $(90^\circ, \pm 75^\circ)$ -Wicklung denken, bei denen die zu untersuchende außenliegende 90° -Schicht durch eine Rißstopperschicht gegen die auch in

der $\pm 75^\circ$ -Wicklung zu erwartende Ribbildung "isoliert" ist. Vorerst erscheint es vernünftig, für $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung die gleiche Abminderung vorzusehen wie bei $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung und somit auch bei Kombinationen von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ die Moduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ gleich abzumindern.

Mit der in [2] vorgenommenen Einführung der Anstrengung \mathcal{E}_{IFF} oder Überanstrengung $(\mathcal{E}_{IFF} - 1)$ als derjenigen Variablen, welche die Abminderung der Elastizitätsgrößen $E_{\perp S}, G_{\perp\parallel S}, \nu_{\perp\parallel}$ steuert, wurde die für kombinierte Beanspruchungen erforderliche Verallgemeinerung erreicht. Sie bewährt sich insbesondere auch dann, wenn sich das Verhältnis der Spannungen untereinander bei einer Belastungssteigerung oder im Laufe der Zeit ändert.

Für die Durchführung der Spannungsanalyse nach eingetretener Ribbildung infolge Zfb nach Modus A bedarf es noch einiger Präzisierungen:

Die Zfb-Anstrengung \mathcal{E}_{IFF} muß, damit überhaupt die Überanstrengung (oder "Überdehnung") in Erscheinung tritt, mit Elastizitätsgrößen berechnet werden, die noch nicht mit η abgemindert sind.

Da man in der Regel bereits vor der Ribbildung mit Sekantenmoduln $E_{\perp S}, G_{\perp\parallel S}$ gerechnet hat, die von den erreichten Spannungen σ_2, τ_{21} abhängig gemacht wurden, stellt sich die Frage, mit welchen Sekantenmoduln nach Eintritt der Ribbildung gerechnet werden soll. Eine halbwegs "exakte" Lösung ist hier wegen des inhomogenen Spannungszustands in der gerissenen Schicht nicht angebar. Vernünftig erscheint es, mit dem Sekantenmodul $E_{\perp S}$ bzw. $G_{\perp S}$ zu rechnen, welcher zu der über der Länge gemittelten Spannung σ_2 (Bild 6.5) bzw. τ_{21} gehört. D.h., daß nach dem Beginn der η -Abminderung die Sekantenmoduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ bei den Spannungen σ_2 bzw. τ_{21} im Spannungs,Verzerrungs-Diagramm abzugreifen sind, die sich unter Verwendung der mit η abgeminderten Elastizitätsgrößen errechnen. (In [2] war empfohlen worden, nach Einsetzen der η -Abminderung die Überanstrengung mit den Sekantenmoduln zu berechnen, die bei Erreichen der Ribbildungsgrenze vorlagen. Dies erscheint aber bei genauerer Überlegung nicht mehr plausibel.)

Hier kann nun auch die noch offen gebliebene Frage beantwortet werden, welcher Wert für σ_2 oberhalb der Ribbildungsgrenze in die Faserbruchbedingung eingesetzt werden soll. Will man möglichst korrekt vorgehen, sollte man in die Fb-Bedingung den Wert für σ_2 einsetzen, der sich mit der η -Abminderung errechnet.

Es sei darauf hingewiesen, daß in dieser Arbeit ein Höchstmaß an "physikalischer Korrektheit", das in der Konstruktionspraxis gerade noch praktikabel erscheint, dargestellt wird. Ob es immer sinnvoll ist, dies in den Rechenprogrammen in vollem Umfang umzusetzen, muß von Fall zu Fall geprüft werden. Man sollte sich stets dessen bewußt sein, wieviel Willkür z.B. vorerst noch in der angesetzten η -Funktion steckt. Deshalb erscheint es durchaus angebracht, in Rechenprogrammen, wenn nötig oder wünschenswert, aufgrund der Kenntnis der Zusammenhänge Vereinfachungen vorzunehmen. Darauf wird in Kapitel 7 noch eingegangen.

6.2.2 Bruch-Modi B und C

Wenn bei einer kombinierten (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung σ_2 eine Druckspannung ist, können entstehende Zf-Risse sich nicht öffnen; die gespeicherte Formänderungsenergie sorgt dafür, daß die Rißflächen aufeinandergedreht bleiben. Eine nennenswerte Druck-Entspannung kann also nicht stattfinden, selbst wenn bei der Rißentstehung etwas Material "zerbröseln". Wohl aber können die beiden Rißflächen sich unter der Wirkung der τ_{21} -Schubspannung etwas gegeneinander verschieben. Dort, wo die gerissene Schicht mit den Nachbarschichten verklebt ist, ist keine solche Relativbewegung möglich, in der Schichtdickenmitte ist sie am größten. Die Relativbewegung bei Schub ist analog zum Öffnen der Risse bei Zug zu betrachten. Dies berechtigt im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ dazu, $E_{\perp s}$ und $G_{\perp \parallel s}$ in gleichem Maße mit η abzumindern. Insofern wird der in [2] gemachte Vorschlag, im Bereich $\sigma_2 < 0$ sowohl $E_{\perp s}$ als auch $G_{\perp \parallel s}$ nur sehr schwach abzumindern, vgl. Bild 6.2 auf S. 84, der Realität nicht ganz gerecht. Es gibt keinen Grund, zwei fast reine τ_{21} -Spannungszustände, einmal mit einer zusätzlichen sehr kleinen Spannung $\sigma_2 > 0$ und ein anderes Mal mit einer sehr kleinen Spannung $\sigma_2 < 0$, unterschiedlich zu behandeln. Mit anderen Worten: Die Abminderungsfunktion η sollte beim Durchgang durch $\sigma_2 = 0$ keinen Sprung aufweisen.

Wenn die beim Bruch erreichbare σ_2 -Druckspannung anwächst, nimmt mit ihr gleichzeitig der Reibwiderstand $\mu\sigma_2$ zu, der die Relativbewegung der Rißflächen erschwert. Ein Teil des τ_{21} -Schubes muß dann gar nicht mehr über die Nachbarschichten umgeleitet werden, sondern wird durch Reibkräfte direkt über die Rißflächen übertragen. Will man sehr konsequent vorgehen, muß man dementsprechend die η -Abminderung für $G_{\perp \parallel s}$ mit zunehmender σ_2 -Druckspannung beim Bruch allmählich zurücknehmen. Ohne an dieser Stelle die Frage zu erörtern, "ob sich der Aufwand lohnt", wird für die η -Abminderung im Bereich $\sigma_2 < 0$ folgende unterschiedliche Abminderung vorgeschlagen:

- Der Sekantenmodul $E_{\perp s}$ erfährt überhaupt keine η -Abminderung. Er wird am $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm abgegriffen, das bei Bedarf zu diesem Zweck "verlängert" wird.
- Für die Abminderung von $G_{\perp \parallel s}$ wird der gleiche Funktionsverlauf von η wie im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ benutzt; jedoch wird die Abminderung η mit wachsender σ_2 -Druckspannung allmählich weniger wirksam gemacht. Dazu wird folgende Interpolation zwischen den Werten $\eta^{(+)}$ und 1 vorgeschlagen:

$$\eta^{(-)} = \eta^{(+)} \cos^2 \rho + 1 \sin^2 \rho \quad \text{für } \sigma_2 < 0 \quad \text{mit } \rho = \arctan \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right|. \quad (6.4)$$

$\eta^{(-)}$ und $\eta^{(+)}$ sind hierin die einander entsprechenden η -Werte (bei gleichem \mathcal{E}_{IFF} -Wert) für $\sigma_2 < 0$ bzw. $\sigma_2 > 0$.

7 Durchführung und Auswertung der Bruchanalyse

7.1 Rißbildung und Verformungsverhalten

Nachdem nun die Werkzeuge der schichtenweisen Bruchanalyse, nämlich Spannungsanalyse, Bruchbedingungen und Degradationsmodelle, vorgestellt worden sind, muß noch kurz ihre Anwendung erörtert werden. Einen Überblick über den Ablauf kann man sich am ehesten aus einem Fluß-Schema verschaffen; ein solches zeigt **Bild 7.1** auf S. 92.

Wenn man die Modelle und Methoden in der dargestellten relativ "perfekten" Form anwendet, wird damit ein Belastungsvorgang eines Laminats vom Belastungsbeginn bis zum Totalbruch recht wirklichkeitsnah auf dem Rechner simulierbar. All die Nichtlinearitäten und Interaktionen bedingen allerdings viele Iterationen. Wenn man z.B. "in einem Zug", d.h. nicht durch Steigerung der Belastung in kleinen Schritten, die Rißbildungsgrenze einer Schicht ermitteln will, wählt man für die erste Rechnung normalerweise erheblich zu hohe Sekantenmoduln und benötigt dann einige Iterationsschleifen, bis Moduln, Spannungen und Verzerrungen sowie ggf. auch η -Abminderungsfaktoren hinreichend in Einklang gebracht sind [2]. Die Anzahl der je Laststufe nötigen Iterationen ist geringer, wenn man die Belastung rechnerisch in kleinen Inkrementen steigert. Dies ist ohnehin immer dann nötig, wenn man das nicht-lineare Spannungs,Verzerrungs-Diagramm des Laminats berechnen will. Ein solches erhält man einschließlich der Information über den Rißbildungsbeginn aller nacheinander betroffenen Schichten. Hierbei ist vor allem auch die Angabe über den Bruch-Modus (A, B, C) von größtem Interesse. Der Rißbildungsbeginn einer Schicht zeigt sich im Spannungs,Verzerrungs-Diagramm des Laminats durch eine mehr oder weniger ausgeprägte Steigungsänderung, ein sogenanntes "Knie" an [69], s. auch Bild 6.4 auf S. 86.

7.2 Delaminationsgefahr

Ein Delaminationsbeginn kann mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse nicht annähernd so zuverlässig vorhergesagt werden wie die "intralaminaren" Zwischenfaserbrüche. Die Frage, ob intralaminare oder interlaminare Brüche auftreten, kann naturgemäß nur mit Hilfe

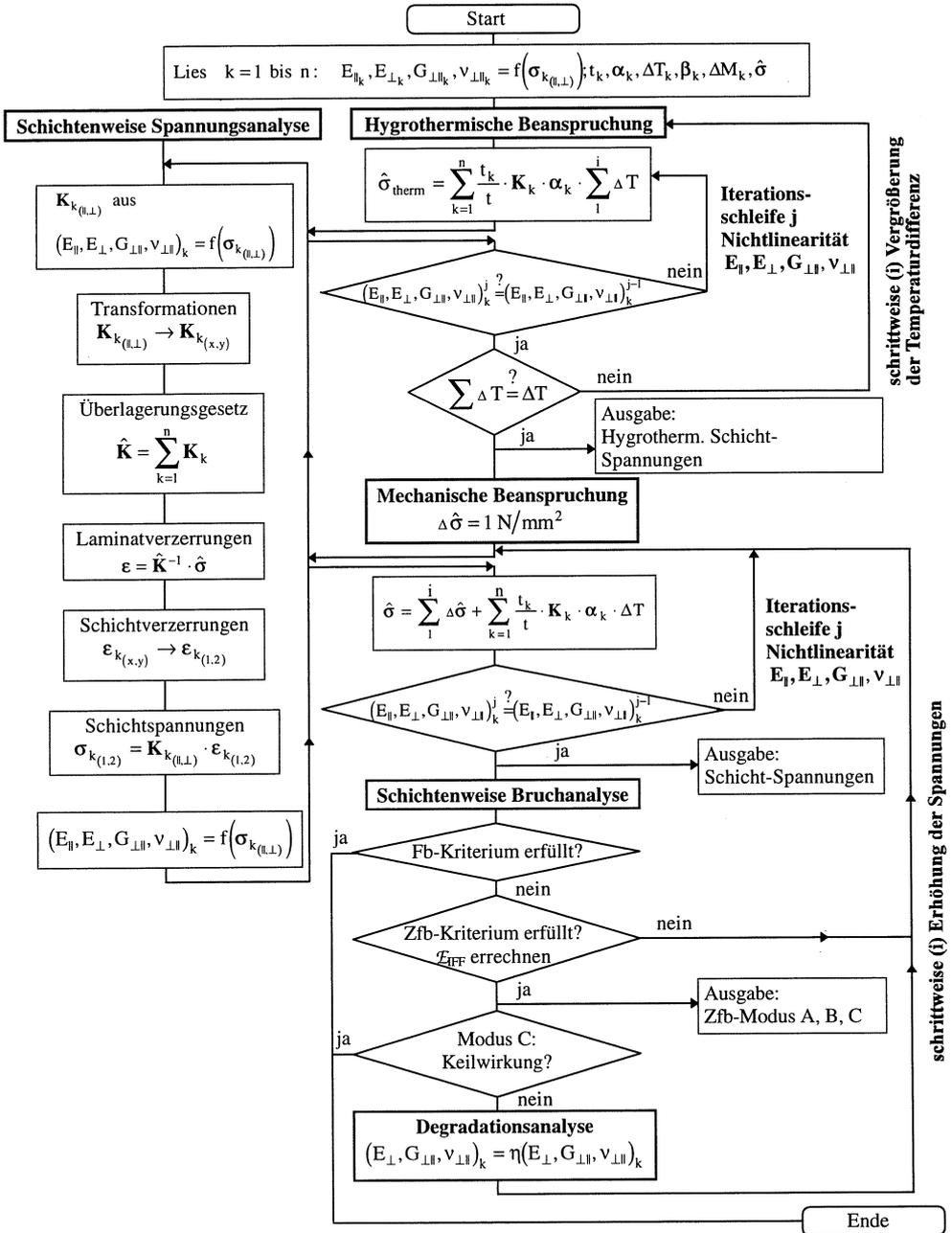


Bild 7.1: Flußdiagramm der schichtenweisen Spannungs- und Bruchanalyse

einer kompletten 3D-Bruchanalyse untersucht werden, die erst im Teil III behandelt wird. Mit den dort angegebenen Delaminationsbedingungen läßt sich feststellen, ob primär, d.h. bevor ein intralaminarer Bruch eintritt, eine Delamination zu erwarten ist. Die Erfahrung lehrt, daß dies in "ungestörten" Bereichen von Bauteilen äußerst selten der Fall ist. Dies erklärt sich sehr einfach daraus, daß sich dort, d.h. in einiger Entfernung von Krafteinleitungsstellen und "freien Rändern", keine gefährlichen interlaminaren Spannungen entwickeln können, weil hierfür die aus Gleichgewichtsgründen nötigen hohen Gradienten der intralaminaren Spannungen (s. Abschnitt 3.4) fehlen. Dies ging bereits mit größter Deutlichkeit aus einer elementaren Betrachtung an biegebeanspruchten GFK- und CFK-Rohren [45] hervor. In [70] wird über eine 1,6 Jahre (netto!) andauernde Schwingbeanspruchung mit 10^8 Schwingungsspielen eines GFK-Kastenträgers berichtet, bei dem bei der Konstruktion besonders auf "sanfte" Übergänge zwischen Gurt und Steg geachtet worden war. Nur bei einem etwas zu klein ausgefallenen Rundungsradius entwickelte sich eine örtlich begrenzte Delamination zwischen dem $\pm 45^\circ$ -Steg-Laminat und dem 0° -Gurt.

Aus den vielen Schwingversuchen an GFK-Antriebswellen, über die in [27] berichtet wird, wurde vor allem folgende Erfahrung gewonnen: Nennenswerte Delaminationen entwickeln sich an solchen "glatten" Bauteilen mit relativ homogenen Spannungszuständen und ohne freie Ränder offenbar immer erst dann, wenn zuvor intralaminare Zf-Risse entstanden sind. Dadurch, daß an den Rissen, insbesondere solchen vom Modus A, der Kraftfluß einer Schicht plötzlich unterbrochen wird, werden die intralaminaren Spannungen σ_2 und τ_{21} an dieser Stelle gleich "null". Nach einigen Millimetern – bei größerer Rißdichte auch schon nach Bruchteilen eines Millimeters – erreichen σ_2 und τ_{21} aber durch die Wirkung von interlaminaren Schubspannungen wieder eine solche Höhe, daß erneut ein Riß entstehen kann. An den Rißstellen existieren nun plötzlich die für die Entstehung interlaminarer Schubspannungen nötigen hohen Gradienten der intralaminaren Spannungen, s. Bild 2.6 auf S. 20. Der ursprüngliche Beanspruchungszustand in der Schichtebene verwandelt sich durch die Zf-Rißbildung lokal in einen räumlichen Beanspruchungszustand! Die Umgebung der Kreuzungspunkte von Rissen benachbarter Schichten sind Orte besonders hoher Spannungskonzentrationen und deshalb oft der Ausgangspunkt von Delaminationen.

Die Auswertungen der in [27] beschriebenen Versuche legt die Vermutung nahe, daß nahezu eine "Sättigung" mit intralaminaren Rissen eingetreten sein muß, bevor sich eine "ausgeprägte" Delamination bemerkbar macht. Darüber, wann und in welchen Schichten des Laminats hohe Rißdichten erreicht werden, kann der Überschreitungsgrad ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) aus der Zfb-Analyse Aufschluß geben. Damit bietet sich eine Möglichkeit, Ort und Belastungshöhe (oder Schwingspielzahl) anzugeben, für die eine erhöhte Delaminationsgefahr zu erwarten ist. In **Bild 7.2** ist der Versuch unternommen worden, für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung eine Markierungslinie für den Grenzzustand "Erhöhte Delaminationsgefahr" festzulegen. Wie hoch

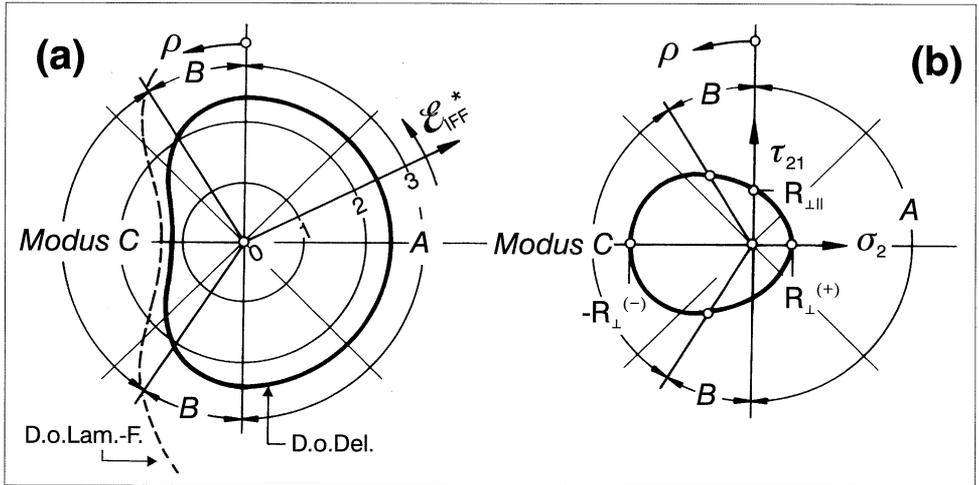


Bild 7.2: (a) Darstellung der "Warn Grenzen" für hohe Delaminationsgefahr (Danger of Delamination, D.o. Del.) und Gefahr des Laminatversagens (Danger of Laminate Failure, D.o. Lam-F.) in einem Polardiagramm; (b) Figur zur Herstellung der Verbindung zwischen dem Winkel ρ im Polardiagramm und den Winkeln an der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve

für bestimmte Faser-Matrix-Kombinationen und Herstellverfahren der Überschreitungsgrad ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) anzusetzen ist, ab dem eine erhöhte Delaminationsgefahr besteht, kann nur aus experimenteller Erfahrung entschieden werden; deshalb sind die im Bild gewählten Zahlenwerte nur exemplarisch zu werten. Wegen der mit großen Bruchwinkeln verbundenen "Sprengkraft" beginnt die Markierungslinie bei reiner Quer-Druckbeanspruchung bereits bei $\mathcal{E}_{IFF_0}^* = 1,25$. Bis zur reinen Quer/Längs-Schubbeanspruchung nimmt der delaminationskritische Wert von \mathcal{E}_{IFF}^* dann gleichmäßig nach folgender Beziehung

$$\mathcal{E}_{IFF}^* = \mathcal{E}_{IFF_0}^* (m \cos^2 \rho + \sin^2 \rho) \quad \text{für } \sigma_2 < 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \arctan \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \quad (7.1)$$

bis auf den m-fachen Wert zu. Im Bereich des Modus A bleibt er konstant. Das Bild 7.2 zeigt den Verlauf von \mathcal{E}_{IFF}^* für $m = 2$ in Form eines Polardiagramms.

Mehr als dieses "Aufmerksam machen" auf den Ort und die Belastungshöhe, bei denen mit einer erhöhten Delaminationsgefahr gerechnet werden muß, kann die hier dargestellte elementare Betrachtungsweise nicht leisten. Aber selbst dies stellt schon einen nicht geringzuschätzenden Fortschritt dar. Im Rahmen der im Teil III behandelten Bruchanalyse bei räumlichen Spannungszuständen wird im Abschnitt 9.3 noch einmal auf die Delaminationsproblematik eingegangen.

7.3 Laminat-Versagen

Wegen der großen Zerstörungen, die mit einem Faserbruch – im hier benutzten Wortsinn – einhergehen, wird man in der Regel Fb in einer Schicht mit Laminatversagen gleichsetzen. Dies erscheint insbesondere dann angebracht, wenn sich Fb nicht nur für eine eng begrenzte Stelle, sondern für einen größeren Bauteilbereich errechnet. Ob nach eingetretenem Fb noch eine Resttragfähigkeit vorhanden ist, oder die verbleibenden Schichten sogar noch eine Laststeigerung ermöglichen, kann man prüfen, indem man alle Elastizitätsgrößen der vom Fb betroffenen Schicht zu "null" setzt, aber ihre geometrischen Daten unverändert läßt. Man sollte jedoch bei der Bewertung von Rechenergebnissen oberhalb einer Belastung, bei der bereits ein Fb eingetreten ist, bedenken, daß der Fb einer Schicht normalerweise auch Schäden in Nachbarschichten bewirkt.

Beim Auftreten von Zfb des Modus C, und zwar insbesondere solchen mit stark überwiegender σ_2 -Druckbeanspruchung, die zu großen Bruchwinkeln θ_{fp} führt, ist nicht nur die Spannkonzentration an der Rißstelle, sondern die von der Keilwirkung herrührende "Sprengkraft" zu beachten, die nach erfolgter Delamination das Beulen einzelner abgelöster Schichten begünstigen kann. Wie hoch die von einem schrägen Bruch nach Modus C ausgehende Gefahr einzuschätzen ist, hängt außer vom Bruchwinkel θ_{fp} vor allem von der relativen Dicke (Verhältnis von Schichtendicke zu Laminatdicke) der betroffenen Schicht oder Schichten und ihrer Plazierung im Laminat ab. Sollte sich bei großen Bruchwinkeln und großer relativer Dicke ein Überschreitungsgrad ergeben, der deutlich über $\mathcal{E}_{IFF}^* = 1,25$ hinausgeht, kann auch dies Laminatversagen bedeuten. In Bild 7.2 ist deshalb im Bereich des Modus C außer der Linie für erhöhte Delaminationsgefahr eine weitere Linie, diesmal für mögliches Laminatversagen, eingezeichnet, und zwar für Werte, die sich als $(\mathcal{E}_{IFF}^*)^{1,5}$ aus den \mathcal{E}_{IFF}^* -Werten nach Gl. (7.1) errechnen. Wenn sich die durch die Warnungslinie angezeigte als kritisch hinsichtlich Laminatversagen betrachtete Situation nicht durch einen veränderten Laminataufbau beseitigen läßt, muß sie detaillierter, evtl. auch experimentell abgeklärt werden.

7.4 Anwendung auf gewebeartige Strukturen

Obwohl man zur Erzielung hoher Schädigungs- und Bruchgrenzen, wie bereits im Abschnitt 2.1 erläutert, eine gestreckte Fadenführung anstrebt, kommt man oft aus herstelltechnischen Gründen nicht umhin, Gewebe, Wickelstrukturen mit Wickelbandüberkreuzungen oder geflochtene Faserstrukturen einzusetzen [21,22]. Glasseidengewebe spielen beispielsweise in der Hochspannungs-Elektrotechnik eine bedeutende Rolle, wo neben guten mechanischen Eigenschaften eine hervorragende elektrische Güte (Durchschlagfestigkeit, Glimmentladungsfreiheit usw.) unabdingbar ist. Ein typisches Beispiel sind mit feinen Glasseidengeweben im

Vakuum-Imprägnierverfahren hergestellte Lichtbogen-Löschkammern, die mechanisch und elektrisch hochbelastbare Innendruckbehälter darstellen. Es fragt sich deshalb, inwieweit die vorgestellten, mit idealisierten UD-Schichten aufgebauten Modelle auch auf gewebeartige Strukturen übertragbar sind. In [2] ist dazu folgendes ausgeführt worden:

Wir vermuten – und erste experimentelle Erfahrungen bestätigen dies –, daß man auch das Verhalten von Gewebelaminaten oder im Faser-Wickel-Verfahren hergestellten Verbunden, bei denen die Fasern gleicher Richtung nicht in geschlossenen UD-Schichten liegen, recht gut mit dem Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" erfassen kann.

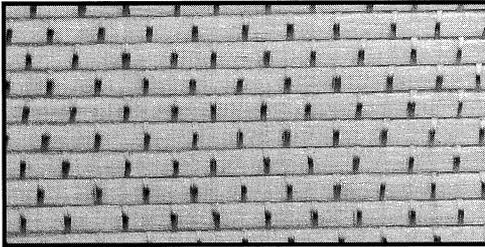


Bild 7.3: Kettstarkes Glasseidengewebe

Inzwischen ist diese Auffassung durch weitere Experimente bestätigt worden, wobei es sich allerdings um Strukturen mit relativ geringer Fadenwelligkeit handelte, wie sie für hochbeanspruchte Bauteile, z.B. Segelflugzeugteile, in Betracht kommen. **Bild 7.3** zeigt ein kettstarkes Gewebe, bei dem mehr als 90% aller Fasern parallel orientiert in den Kettfäden vereinigt sind. Es versteht sich von selbst, daß Lamine aus solchen Geweben, auch wenn in ihnen die einzelnen Gewebelagen unterschiedlich orientiert sind, so daß die Lamine solchen aus UD-Prepreglagen ähneln, recht gut mit dem Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" beschrieben werden können. Die Brauchbarkeit des Modells wird um so fragwürdiger, je mehr sich die Fasermengen in Kett- und Schußrichtung dem Verhältnis 1:1 nähern und je ausgeprägter die Fadenwelligkeit ist, die durch die Art der Bindung (Atlas-, Köper-, Leinwandbindung) bestimmt wird. Die nicht gestreckte Fadenlage ist sowohl bei Zug- als auch bei Druckbeanspruchung nachteilig. Bei Zug tendieren die Fäden dazu, sich zu strecken, so daß im Bereich der Fadenkrümmung unerwünschte Zusatzbeanspruchungen entstehen. Unter Druckbeanspruchung neigen die gekrümmten Fäden zum Knicken, so daß an den Überkreuzungspunkten von Kett- und Schußfäden auch leicht Delaminationen entstehen können.

Bild 7.4 zeigt schematisch die Struktur eines Gewebes aus gleichen Kett- und Schußfäden, bei dem der "Schuß" beim Webvorgang (abwechselnd über 2 und unter 2 Kettfäden) eine Köperbindung erzeugt hat. In **Bild 7.5** sind Kett- und Schußfäden gedanklich "entflochten" worden. Die beiden Fadenlagen mit jeweils gleichgerichteten Fasern unter-

scheiden sich von einer UD-Schicht des Modells dadurch, daß die Fasern nicht gleichmäßig, sondern in Fäden gebündelt¹ auftreten, und vor allem durch den regelmäßigen Wechsel der Höhenlage. Jeder Faden wechselt ständig in einer "sanften Welle" seine Lage zwischen Ober- und Unterseite des Gewebes. Trotzdem legt das Bild der zwei gekreuzten Schichten es nahe, das bewährte Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" beizubehalten.

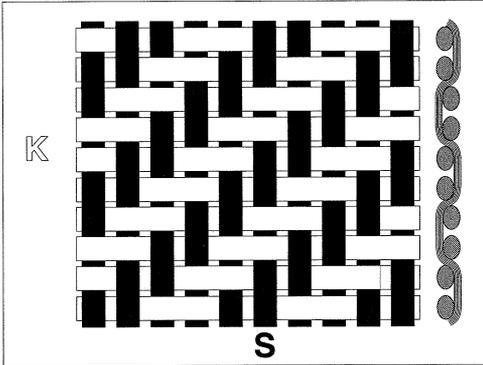


Bild 7.4: Gewebestruktur in Körperbindung, Kettfäden *K* und Schußfäden *S*

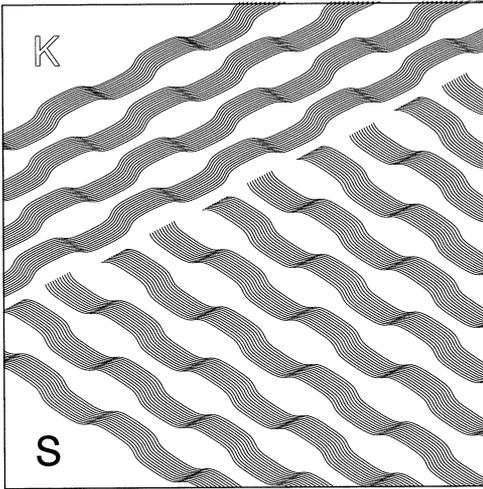


Bild 7.5: Kett- und Schußfäden des Gewebes nach Bild 7.4 gedanklich "entflochten"

Wenn die Abweichungen zwischen der wirklichen Faserstruktur und dem Modell relativ groß sind, empfiehlt es sich allerdings, eine spezielle "Kalibrierung" des Modells vorzunehmen, indem man Modellparameter an Versuchsergebnisse anpaßt, die man an einem entsprechenden Gewebelaminat ermittelt. Als Rechenmodell für die Gewebelage wird hierfür

¹Eine gewisse Fadenbündelung ist allerdings auch meistens in UD-Schichten zu beobachten, die mit UD-Prepregs oder im Wickelverfahren mit Rovings hergestellt werden.

ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat aus einer größeren Anzahl von UD-Schichten gewählt (nicht zwei unverbundene UD-Schichten!). Am realen Gewebelaminat müssen dann mindestens drei Belastungsversuche mit genauer Dehnungs- bzw. Schubwinkelmessung bis zum Bruch durchgeführt werden. Um störende Randeffekte auszuschalten und um eine Schubbeanspruchung gleichmäßig und störungsfrei in den Probekörper einleiten zu können, empfiehlt es sich, Zug/Druck-Torsions-Prüfungen [24] an rohrförmigen Probekörpern vorzunehmen, bei denen die Fäden in Axial- und Umfangsrichtung verlaufen (x -Richtung = Axialrichtung = Kett- richtung K, Schußrichtung S). Bei der Kalibrierung des Rechen-Modells entstehen gewisse Schwierigkeiten daraus, daß zunächst auch die für die Rechnung zu benutzenden Elastizitäts- größen nicht genau bekannt sind. Es empfiehlt sich das folgende schrittweise Vorgehen:

1. Torsionsversuch

Aufgenommen wird dabei das (τ_{xy}, γ_{xy}) -Diagramm, das gleichzeitig das $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$ -Diagramm ist. Daraus erhält man $G_{\perp\parallel S}$. Vor allen Dingen wird das Torsionsmoment bei Beginn der Ribbildung registriert. Daraus und mit den geometrischen Abmessungen läßt sich $\tau_{xy}(\text{Zfb}) = R_{\perp\parallel}$ berechnen. Bei der weiteren Belastung über die Ribbildungsgrenze hinaus erhält man erste Anhaltspunkte für die in Betracht kommende Abminderungsfunktion $\eta(\mathcal{E}_{IFF})$. Wie im Abschnitt 2.5 ausführlich erörtert, macht es aber keinen Sinn, die Torsions- belastung allzuweit über den Ribbildungsbeginn hinaus zu steigern, weil sich dann nur noch undefinierte und unberechenbare Zerstörungsvorgänge abspielen; eine echte Schubfestigkeit R_{KS} des Gewebelaminats gibt es nicht!

2. Zugversuch

Es wird das $(\sigma_x, \varepsilon_x)$ -Diagramm aufgenommen. Seine Auswertung gestaltet sich etwas schwie- riger als beim (τ_{xy}, γ_{xy}) -Diagramm, weil die Verteilung der Last auf die Schichten nun "sta- tisch unbestimmt" ist und deshalb mehrere Elastizitätsgrößen, nämlich $E_{\parallel}, E_{\perp S}, \nu_{\perp\parallel}$ ins Spiel kommen, und weil man weit über den Zfb-Ribbildungsbeginn hinaus bis zum Faser- bruch belasten muß. Man wird für die Elastizitätsgrößen zunächst Erfahrungswerte ansetzen müssen, die man dann sukzessive mit Versuchswerten korrigiert. Aus den registrierten La- sten bei Ribbildungsbeginn (in den Schußfäden!) sowie bei Faserbruch (der Kettfäden) und dem Vergleich mit den am Modell errechneten Spannungen σ_{2S} (bei Ribbildungsbeginn) und σ_{1K} (bei Faserbruch) erhält man die beiden Modellparameter $R_{\perp}^{(+)}$ und $R_{\parallel}^{(+)}$.

3. Druckversuch

Dieser wird genau so wie der Zugversuch durchgeführt, und zwar bis zum Totalbruch. Da- mit wird $R_{\parallel}^{(-)}$ erhalten. Möglicherweise erhält man aus Meßwerten für Zfb des Modus C in den Schußfäden auch einen Anhaltswert für $R_{\perp}^{(-)}$. Falls vor dem Totalbruch keine Zfb des Modus C beobachtet werden, kann man solche eventuell in einem weiteren Versuch mit zusätzlicher Torsionsbelastung herbeiführen.

Wenn das zu modellierende Gewebe nicht in Kette und Schuß ganz gleich ausgeführt ist, muß man den 2. und 3. Versuch zusätzlich an Probekörpern ausführen, bei denen die Schußfäden in Axialrichtung verlaufen.

Selbstverständlich wird man, wenn bei den Versuchen gewebespezifische Schädigungsgrenzen beobachtet werden, z.B. Delamination an Fadenkreuzungspunkten, diese auch in das Rechen-Modell einbauen.

Wenn man vorwiegend oder ausschließlich mit Gewebelaminaten arbeitet, kann es sinnvoll sein, die Modelle noch weiter im Hinblick auf spezifische Gewebeeigenschaften abzuwandeln, wobei u.U. Ergebnisse strukturmechanischer Untersuchungen [23,71] genutzt werden können. Keinesfalls sollte man aber die Homogenisierung so weit treiben, daß die Schädigungs- und Bruchvorgänge nicht mehr eindeutig den Kettfäden bzw. Schußfäden zugeordnet werden können. Sonst wäre man beim Laminat-Entwurf wieder außerstande, gezielte Verbesserungen vorzunehmen.

Im übrigen besteht kein Zweifel, daß sich innerhalb eines Kett- oder Schußfadens genau die gleichen Schädigungs- und Bruchvorgänge abspielen wie in einer ausgedehnten UD-Schicht. Nur sind die geometrischen Abmessungen der zu betrachtenden UD-Bereiche sehr viel kleiner, so daß sich der "dünne Schicht"- und "in situ"-Effekt (s. Abschnitt 11.2) wahrscheinlich sehr stark bemerkbar machen wird. Vielleicht erklärt dies die bisweilen erstaunlich hohen Reißbildungsgrenzen, die mit Laminaten aus sehr feinen Glasseidengeweben erreicht werden.

7.5 "Schnelle Programme" für den Laminat-Entwurf

Wenn man beim Rohentwurf eines Laminats die netztheoretischen Regeln beachtet, kann man sicher sein, ein Laminat mit einem "vernünftigen" Fasergerüst zu erhalten. Möglichst bald sollte sich aber dann eine – eventuell noch grobe – schichtenweise Bruchanalyse mit einer Bestimmung der verschiedenen Bruch-Modi anschließen. Das frühe Entwurfsstadium stellt eine der schwierigsten aber auch wichtigsten Phasen bei der Bauteilentwicklung dar, denn oft entscheidet der Entwurf bereits über Erfolg oder Mißerfolg eines Faserverbundbauteils. Herstelltechnische Probleme und die damit eng verbundene Kostenentwicklung müssen ebenso wie die hier behandelten auch nicht gerade einfachen Festigkeitsprobleme in eine Harmonie gebracht werden. Dabei ist es eine große Hilfe für den Konstrukteur, wenn ihm für die Beurteilung der Festigkeitsfragen eine benutzerfreundliche Software zur Verfügung steht, die ihm schnell und zuverlässig die kritischen Stellen seines Laminatentwurfs aufzeigt. Für die vielen Entscheidungen, die während der Entwurfsphase getroffen werden müssen, braucht man vor allem Programme, die schnell sind, und die Auswirkung der vorgenommenen Veränderungen am Schichtaufbau deutlich erkennbar darstellen. Zu Gunsten der Schnelligkeit, Anschaulich-

keit und Dialogfähigkeit kann man in der Entwurfsphase ohne weiteres auf manche Feinheit der Spannungs- und Bruchanalyse verzichten.

So ist es z.B. durchaus denkbar, bei der Verformungsanalyse viele Rechenoperationen einzusparen, indem man nicht-lineares Rechnen, dort wo es zulässig erscheint, vermeidet. Hierzu kann man die folgenden Überlegungen anstellen.

Bei der Beurteilung der Auswirkung der Moduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ auf die Rechenergebnisse treten zwei Bereiche mit ganz unterschiedlicher Sensitivität auf.

1. Die gewählten Moduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp S}$ haben Einfluß auf die errechneten Verformungen des Laminats. Wenn dieses netztheoretisch gut konzipiert ist, wirken sich die gewählten Moduln für σ_{\perp} - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung aber nur geringfügig auf die errechneten Verformungen des Laminats aus, weil diese ganz überwiegend durch die faserdominierten Steifigkeiten (richtiger: Nachgiebigkeiten) bestimmt werden. Insbesondere bei netztheoretisch tragfähigen CFK-Laminaten spielt es für die Laminatverformung fast keine Rolle, ob die Nichtlinearität bei $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ beachtet wird. Hier kann es eher von Belang sein, ob das schwach progressive ($\sigma_{\parallel}, \varepsilon_{\parallel}$)-Diagramm bei der Verformungsrechnung berücksichtigt wird.
2. Bei der Berechnung der Spannungen σ_2 und τ_{21} in den einzelnen Schichten zwecks Beurteilung ihrer Zfb-Anstrengung kommt es sehr darauf an, daß man mit den richtigen Sekantenmoduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ rechnet, weil man sonst zu hohe Spannungen und damit auch zu hohe Zfb-Anstrengungen \mathcal{E}_{IFF} ermittelt.

Wenn man es ausschließlich mit netztheoretisch tragfähigen CFK-Laminaten zu tun hat, wie beispielsweise in der Luftfahrtindustrie, die nur mit $(0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ)$ -CFK-Laminaten arbeitet, kann man durchaus daran denken, die gesamte Verzerrungsanalyse des Laminats linear-elastisch durchzuführen. Um hierbei die Nichtlinearität der Spannungs, Verzerrungs-Beziehungen aber zumindest näherungsweise zu berücksichtigen, empfiehlt es sich, nicht mit den Anfangsmoduln $E_{\parallel}, E_{\perp}, G_{\perp\parallel}$ zu rechnen, sondern statt dessen z.B. mit dem Mittelwert aus Anfangsmodul und Sekantenmodul beim Bruch (aus den einachsigen Versuchen).

Die zur Bruchanalyse dienende Spannungsberechnung für die einzelnen Schichten muß dann aber sehr wohl iterativ unter Benutzung der tatsächlichen nicht-linearen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen durchgeführt werden. Da die mit der Spannungshöhe veränderlichen Sekantenmoduln bei dieser "aufgespaltenen" Rechnung keine Rückwirkung auf die Laminatverformung haben, braucht man unvergleichlich viel weniger Iterationen durchzuführen als bei einem Rechenlauf gemäß dem Flußdiagramm nach Bild 7.1 auf S. 92. Weil es wegen der fehlenden "Rückkopplungen" keine Konvergenzprobleme gibt, braucht man vor allem nicht in kleinen Laststufen bis zur tatsächlich wirkenden Belastung hochzurechnen, sondern kann direkt die zur gegebenen Belastung gehörenden Laminatverformungen ausrechnen.

Man kann in der Auslegungsphase eines Bauteils sogar daran denken, zunächst auch die η -Abminderung nach eingetretener Ribbildung gar nicht vorzunehmen. Hierzu sollte man sich noch einmal bewußt machen, daß die η -Abminderung ausschließlich dazu dient, die Verformungen des Laminats nach der Überschreitung von Ribbildungsgrenzen möglichst korrekt zu berechnen. Die Überschreitungsgrade ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) der Ribbildungsgrenzen der einzelnen Schichten werden hingegen mit Moduln berechnet, die nicht mit η abgemindert sind! Eine η -Abminderung würde die \mathcal{E}_{IFF} -Werte folglich nur mittelbar beeinflussen, und zwar dadurch, daß mit dieser die Laminatverzerrungen ein wenig größer ausfallen würden als ohne sie. Die Unterschiede zwischen Rechnungen mit und ohne η -Abminderungen sind natürlich dann besonders klein, wenn die Kräfte zum weit überwiegenden Teil von den Fasern aufgenommen werden. Bei CFK ($E_{\parallel}/E_{\perp} \approx 15$ bis $30 : 1$) ist dies noch viel ausgeprägter der Fall als bei GFK ($E_{\parallel}/E_{\perp} \approx 3 : 1$).

Weil man mit gesonderten Bruchbedingungen für Zfb und Fb arbeitet, kann man sich gleichzeitig einen Überblick über die Zfb-Anstrengungen und Fb-Anstrengungen aller Schichten verschaffen, ohne irgend eine Abminderung zwischenschalten zu müssen. Aus einem solchen Überblick erkennt man dann meistens sehr schnell, an welchen Stellen eine verfeinerte Rechnung vonnöten ist.

Wenn man mit der Genauigkeit dieses ersten Überblicks nicht zufrieden ist, kann man in einem zweiten Schritt die Moduln derjenigen Schichten, in denen ein hoher Wert $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ beim Modus A errechnet wurde, einmal drastisch abmindern, indem man z.B. $\eta = \eta_r$ setzt, s. Gl. (6.3) auf S. 86.

Anhand der mit den Methoden dieses Buches erhaltenen Informationen über \mathcal{E}_{IFF} und \mathcal{E}_{FF} mit der zugehörigen Angabe über den Bruch-Modus ist es relativ einfach, Verbesserungen am Laminatentwurf vorzunehmen. Wenn man an den Faserrichtungen nichts ändern will oder kann, läßt sich ein zu hoher \mathcal{E}_{FF} -Wert dadurch herabsetzen, daß man die Fasermenge der betroffenen Schicht oder Schichten erhöht. Bei einem zu hohen \mathcal{E}_{IFF} -Wert ist dies jedoch ganz unwirksam. In diesem Fall muß man zusätzliche Fasern unter etwa 90° oder etwa $\pm 45^\circ$ zur Faserrichtung der betroffenen Schicht anordnen, je nachdem, ob sich die Herabsetzung von σ_2 oder von τ_{21} der betroffenen Schicht als wirksamer erweist. Es muß aber auch der erforderliche Faseraufwand betrachtet werden, der zur Herabsetzung der einen oder anderen Spannung erforderlich ist, denn das Laminat als Ganzes soll ja "optimal" werden.

Diese wenigen Bemerkungen haben schon aufgezeigt, daß eine echte Laminat-Optimierung ein sehr schwieriges Unterfangen ist. Will man dieses "von Hand" bewältigen, gehört neben exzellenten Rechenwerkzeugen langjährige Erfahrung dazu. Deshalb wird zunehmend versucht, mit "automatischer Optimierung" zu arbeiten. Manche der heute verfügbaren Optimierungsprogramme kranken aber noch daran, daß sie mit unzulänglichen Bruchanalysen ausgestattet sind.

Zurückkommend auf die Frage des Verzichts auf die η -Abminderung sei noch folgendes erwähnt: Beim Arbeiten mit der von *Tsai* [5] empfohlenen Last Ply Failure (LPF)-Methode ist ein Verzicht auf Abminderung der Quersteifigkeiten nach dem First Ply Failure (FPF), wie er für die Berechnung in der Entwurfsphase ratsam erscheint, gar nicht denkbar. Hier **müssen** die Quersteifigkeiten **aller Schichten** degradiert werden, damit die Z_{fb} und F_b nicht unterscheidende "Einheits"-Bruchbedingung nach dem ersten Schichtbruch nur noch annähernd wie eine F_b -Bedingung reagiert. Das wird dadurch erreicht, daß bei der Spannungsanalyse alle Z_{fb} -relevanten Spannungen durch eine sehr starke Degradation, die der Netztheorie nahekommt, unterdrückt werden. *Tsai* schreibt deshalb in [5] eine rigorose Abminderung von $E_{\perp}, G_{\perp\parallel}, \nu_{\perp\parallel}$ in allen Schichten – auch den druckbeanspruchten – vor, nachdem der FPF eingetreten ist. Diese Vorgehensweise birgt die Gefahr in sich, daß katastrophale Brüche des Modus C vollkommen übersehen werden!