

Teil III

Neue Wege zu realistischen Zwischenfaserbruch-Bedingungen für räumliche Beanspruchung

8 Grundlagen einer neuen Zwischenfaserbruch-Analyse

8.1 Wesen und Vorgeschichte der neuen Bruchanalyse

8.1.1 Spröbruch und Mohrsche Festigkeitshypothese

Die hier vorgestellte Forschungsarbeit soll keineswegs die Flut der existierenden Bruchbedingungen weiter vermehren. Sie verfolgt im Gegenteil das Ziel, die Zahl der in Betracht kommenden Bruchbedingungen auf einige wenige, dafür aber physikalisch begründete, zu begrenzen. Dazu ist eine unkonventionelle Betrachtungsweise nötig, die zu einer neuartigen Bruchanalyse-Methode führt. Diese unterscheidet sich grundsätzlich von dem bisher üblichen Vorgehen. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der neuen Methode ist, daß in der UD-Schicht klar erkennbare Bruchebenen auftreten. Bei den in der Leichtbautechnik vorherrschenden Faserverbundwerkstoffen mit Polymer-Matrix und hohen Faservolumenanteilen ist dies in der Regel der Fall. Die schon bestehende Sprödeheit des Matrixmaterials wird noch durch die Fehlstellen verstärkt, die zwangsläufig durch das Einfügen der Fasern entstehen. Deshalb ist es denkbar, daß selbst ein "von Hause aus" duktiles Matrixmaterial, wie bestimmte Thermoplaste, sich im Faser-Matrix-Verbund, makromechanisch gesehen, spröde verhält. Viele Faser-Matrix-Verbunde brechen sowohl bei Fb als auch bei Zfb spröde, d.h., ohne äußerlich feststellbare plastische Verformungen treten Werkstofftrennungen auf bestimmten Ebenen ein. Bei Fb sind die "Bruchebenen" allerdings häufig sehr zerklüftet; demgegenüber führt Zfb, der hier betrachtet werden soll, zu relativ glatten Bruchebenen. Inwieweit sich die neue Betrachtungsweise für UD-Verbunde aus verschiedensten Materialien eignet, muß unter dem Gesichtspunkt des Spröbruches von Fall zu Fall geprüft werden.

Der Spröbruch-Charakter der für normale technische Anwendungen vor allem in Betracht kommenden Faser-Kunststoff-Verbunde legte es nahe, sich beim Aufstellen von Bruchbedingungen nicht – wie in der Vergangenheit vielfach geschehen – an die Fließkriterien für duktile Werkstoffe, sondern eher an die für Stoffe mit Spröbruch-Charakter aufgestellten Festigkeitshypothesen von *Coulomb* [72] und *Mohr* [54] anzulehnen.

Der neuen Methode liegt eine makromechanische oder eher als "halb-makromechanisch" zu bezeichnende Betrachtungsweise zugrunde. D.h., zur Beschreibung des Bruchzustands werden – wie in der Ingenieurpraxis allgemein üblich – über Faser- und Matrixquerschnitte gemittelte Beanspruchungen $\sigma_{\perp}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ der UD-Schicht und die zugehörigen "Festigkeiten" $R_{\perp}^A, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}^A$ benutzt; es werden aber vermehrt mikromechanische Vorstellungen berücksichtigt. Der Index A bei den "Festigkeiten" weist bereits darauf hin, daß es sich hier nicht um die gewöhnlichen Festigkeiten handelt, sondern um Widerstände gegenüber einem Bruch in der Wirkebene (Action plane, A), in der die betreffende Beanspruchung wirkt. Dies wird im Abschnitt 8.3 erläutert.

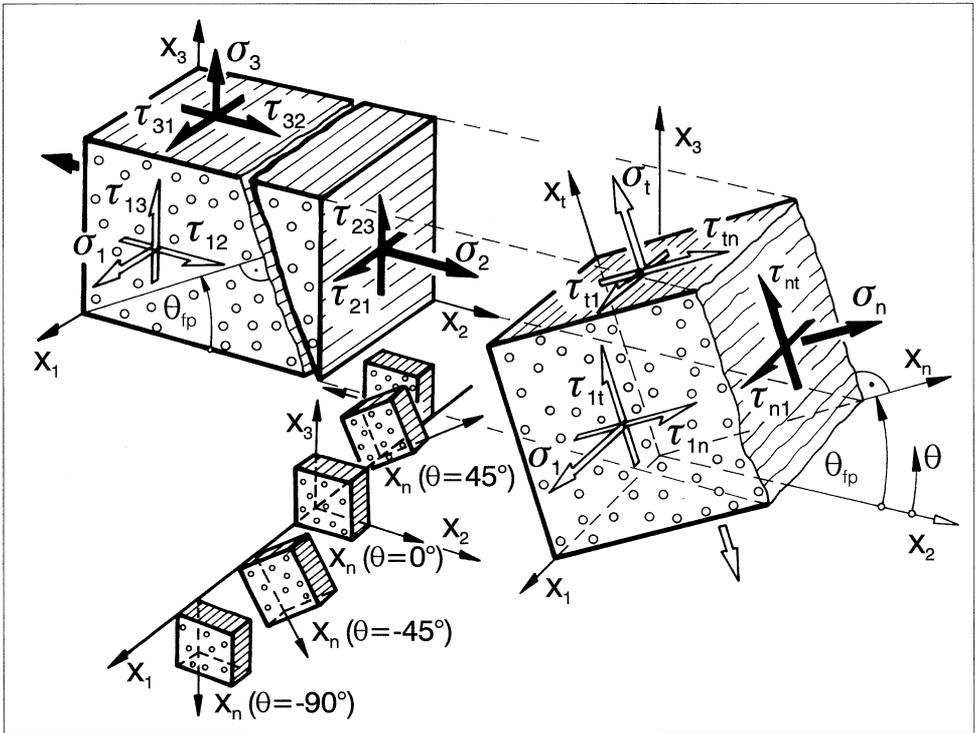


Bild 8.1: Bei der neuen Zfb-Bruchanalyse wird ein um die faserparallele x_1 -Achse drehbares (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem benutzt. Gezeigt sind einige spezielle Stellungen des (x_n, x_t) -Achsenkreuzes wie die auf das (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem und das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem bezogenen Spannungen bei einem allgemeinen räumlichen Spannungszustand eines UD-Verbunds. Das (x_n, x_t) -Achsenkreuz ist um den Bruchwinkel θ_{fp} so gedreht worden, daß x_n senkrecht zur Bruchebene steht. Auf dieser wirken die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$.

Während in allen bisherigen 3D-Bruchkriterien die auf das **feste** (x_1, x_2, x_3) -Schichtkoordinatensystem bezogenen Spannungen erscheinen, wie sie sich direkt aus der schichtenweise Spannungsanalyse ergeben, erfordert die Mohrsche Hypothese, daß die neuen 3D-Bruchbedingungen mit Hilfe einer Funktion der **drei auf der Bruchebene wirkenden Spannungen** $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ ausgedrückt werden. Es wird mit einem um die Faserrichtung x_1 **drehbaren** (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem gearbeitet, dessen Stellung vom örtlichen Spannungszustand abhängt, **Bild 8.1**. Durch eine besondere Rechenoperation wird das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem so gedreht, daß die x_n -Richtung zur Flächennormalen der zu erwartenden Bruchebene wird. Der Grund für die Wahl des drehbaren Koordinatensystems ist der, daß sich gemäß der Mohrschen Hypothese nur für die Bruchebene, die je nach Spannungszustand eine andere Lage einnimmt, physikalisch begründete Bruchbedingungen aufstellen lassen.

Die Festigkeitshypothese, die *Mohr* [54] am Anfang dieses Jahrhunderts für isotrope Stoffe aufstellte, lautet:

Die Bruchgrenze (und die Fließgrenze)¹ eines Materials wird durch die Spannungen der Bruchebene (und der Gleitebene) bestimmt.

Nur beim ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand kann man die Lage der Bruchebene manchmal auf einfache Weise den für den Bruch verantwortlichen Spannungen zuordnen. Bei einem allgemeinen räumlichen Spannungszustand läßt sich grundsätzlich nur noch aussagen, daß σ_1 (und theoretisch gemäß der Mohrschen Hypothese auch noch τ_{12} und τ_{13}) die Ursache für Fb auf einer zur x_1 -Richtung senkrechten Ebene sind, und daß die Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ bei der Erzeugung des Zfb mehr oder weniger zusammenwirken, Bild 1.1 auf S. 4. Über die Lage der Bruchebene beim Zfb weiß man a priori nur, daß der Bruch auf irgendeiner faserparallelen Schnittebene erfolgen wird [1,2]. Die Flächennormale der Bruchebene (fracture plane, fp) bei Zfb wird im allgemeinen – je nach der auftretenden Spannung oder Spannungscombination – um einen Winkel θ_{fp} gegenüber der Schichtebene, d.h. gegenüber der x_2 -Richtung, geneigt sein, wobei θ_{fp} zwischen -90° und $+90^\circ$ variieren kann. Das Aufsuchen der Bruchebene innerhalb einer Winkelspanne von 180° spielt bei der neuen Bruchanalyse-Methode eine wesentliche Rolle.

8.1.2 Hashin's Idee zum neuen Verfahren

Ein entscheidender Impuls für die neuartige Bruchanalyse ging von *Hashin* aus, der in einer 1980 erschienenen Arbeit [3] erstmals den Gedanken äußerte, daß die sinnngemäße Übertragung der Mohrschen Festigkeitshypothese auf UD-Verbunde eine solide physikalische Basis

¹*Mohr* benutzte den Ausdruck "Elastizitätsgrenze". Hier interessiert nur das Bruchverhalten, nicht jedoch das Fließverhalten.

für UD-Bruchbedingungen darstellen könne. Er regte an, die teilweise schon bei der 2D-Beanspruchung praktizierte Zuordnung von Bruchebene und bruchrelevanten Spannungen [1,2] durch die Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese auf UD-Verbunde bei 3D-Beanspruchung auszudehnen. *Hashin* formulierte die auf UD-Verbunde sowohl für Fb als auch für Zfb anzuwendende Bruchhypothese für Sprödbbruchverhalten folgendermaßen:

Wenn eine Versagensebene² identifiziert werden kann, wird das Versagen von der Normalspannung und den Schubspannungen auf der betreffenden Ebene bewirkt.

Für die rechnerische Behandlung des Zfb wird unter dieser Voraussetzung das schon erwähnte drehbare Koordinatensystem nötig, das in die jeweils zu erwartende faserparallele Bruchebene gedreht werden kann. *Hashin* führte hierzu das auf eine faserparallele Schnittebene bezogene (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem ein, das zum Aufsuchen der Bruchebene mit einem Winkel θ zwischen -90° und $+90^\circ$ um die x_1 -Achse gedreht wird, Bild 8.1.

Bei der Spannungsanalyse von Laminaten erhält man zunächst die auf das (x_1, x_2, x_3) -Schichtkoordinatensystem bezogenen "Schichtspannungen" $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Der Spannungszustandsvektor transformiert sich gemäß der Transformationsformel (wenn θ von der x_2 -Achse aus gemessen wird) folgendermaßen in das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem:³

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{t1} \\ \tau_{n1} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{matrix} \right\}. \tag{8.1}$$

$$(c = \cos \theta, s = \sin \theta)$$

Sowohl die oben zitierte, von *Hashin* formulierte Bruchhypothese als auch eine im Abschnitt 8.2.2 aufgestellte erweiterte Zfb-Hypothese basieren auf der Vorstellung, daß der Zfb ausschließlich durch die auf der faserparallelen Bruchebene wirkenden (bei der Transformationsformel mit einem Pfeil markierten) Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ verursacht wird,

²In der vorliegenden Arbeit werden abweichend von *Hashin's* Nomenklatur die Bezeichnungen **Bruch** und **Bruchebene** benutzt, weil vorausgesetzt wird, daß das Versagen (failure) in Form einer Werkstofftrennung (fracture) auftritt.

³Häufig erweist es sich als zweckmäßig, die Transformationsformel mit den folgenden Additionstheoremen umzuschreiben (z.B. zwecks Benutzung des Mohrschen Spannungskreises):

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta.$$

während die gleichzeitig auf den beiden zur Bruchebene senkrechten Schnittebenen auftretenden Spannungen $\sigma_1, \sigma_t, \tau_{t1}$ das Bruchgeschehen nicht beeinflussen. Die auf der Bruchebene wirkende Normalspannung σ_n stellt eine Querbeanspruchung (σ_{\perp}), τ_{nt} eine Quer/Querschubbeanspruchung ($\tau_{\perp\perp}$) und τ_{n1} eine Quer/Längs-Schubbeanspruchung ($\tau_{\perp\parallel}$) dar.

Die Bruchbedingung erhält unter dieser Voraussetzung die allgemeine Form

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1, \quad (8.2)$$

oder in den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta)$ - Raum transformiert:

$$\tilde{F}(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta_{fp}) = 1. \quad (8.3)$$

Ungewöhnlich ist, daß sich die Bruchbedingungen der neuen Art zunächst als Bruchflächen im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum darstellen. Zur Konstruktion der entsprechenden Bruchflächen im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ - Spannungsraum, s. Bilder 9.16 und 9.17 auf S. 167, müssen die Bruchwinkel θ_{fp} bekannt sein. Zur besseren Unterscheidung der Bruchflächen bezeichnen wir die durch die Bruchbedingung im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum beschriebene Bruchfläche als **Master-Bruchfläche**, denn sie beherrscht als übergeordnete dreidimensionale Gesetzmäßigkeit das Bruchgeschehen aller Spannungszustände im fünfdimensionalen Spannungsraum.

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung von Bruchbedingungen, die auf der Mohrschen Festigkeitshypothese beruhen, besteht darin, daß zur Bestimmung der zum Bruch führenden Spannungen zunächst der Bruchwinkel θ_{fp} durch die Lösung eines Extremwertproblems ermittelt werden muß. Und zwar muß der Höchstwert der vom Winkel θ abhängigen "Bruchgefahr" gesucht werden. Dies dürfte der Grund dafür sein, weshalb *Hashin* seine Idee nicht umgesetzt hat und offenbar seine Anregung auch bis 1992 [11] nirgends aufgegriffen wurde. *Hashin* selbst hat nur für den Spezialfall einer in den Spannungen homogenen⁴ Funktion $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ für den Bereich $\sigma_n \geq 0$ angegeben, wie sich der Bruchwinkel θ_{fp} bestimmen läßt. Bei einem festen Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ nimmt nämlich in diesem Fall die linke Seite der Gl. (8.3) für den bei proportionaler Erhöhung der Spannungen eintretenden Bruch unter dem Winkel θ_{fp} ihren Maximalwert an.

Im Abschnitt 8.4.4 wird gezeigt, wie prinzipiell bei einem beliebigen Ansatz der neuen Art der Bruchwinkel gefunden wird. Eine analytische Lösung wird nur in Sonderfällen möglich sein. Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand wird man auf numerische Methoden zurückgreifen müssen, was aber angesichts der heute zur Verfügung stehenden Rechenkapazität kein Hindernis mehr darstellt.

⁴Eine Bruchfunktion ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad r , wenn sich bei Erhöhung aller Spannungen mit einem Faktor λ aus der Bruchfunktion der Faktor λ^r ausklammern läßt.

8.2 Physikalische Grundlagen

8.2.1 Bruchmechanischer Hintergrund

Von Festigkeitsprüfungen an UD-Verbundstoffen mit Polymer-Matrix in Verbindung mit Untersuchungen der Mikrostruktur des Verbundstoffs ist seit langem bekannt, daß die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ und die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ ungekerbter Proben stark vom Vorhandensein sowie der Größe und Form innerer Defekte wie Poren, Härtungsrissen und unverbundenen Bereichen an der Faser/Matrix-Grenzfläche abhängen. Ebenso wie spröde homogene Stoffe zeigen UD-Verbundstoffe, wenn sie einen künstlich angebrachten, parallel zu den Fasern verlaufenden Ri enthalten, im wesentlichen ein Bruchverhalten, das sich mit der linear-elastischen Bruchmechanik beschreiben lät [73,74]. Von dort her gesehen erscheint es ratsam, sich vor der Aufstellung von Bruchbedingungen für Zfb ihren bruchmechanischen Hintergrund zu vergegenwärtigen. Hierzu kann vor allem ein Beitrag von *Hahn*, *Erikson* und *Tsai* [75] aus dem Jahre 1982 dienen, der eine wichtige Ergänzung zu den 1980 von *Hashin* [3] angestellten Überlegungen darstellt.

Bei der bruchmechanischen Betrachtungsweise geht man von der Vorstellung aus, daß ein innerer Defekt der Ausgangspunkt für einen Ri ist, beispielsweise für einen Zfb, der eine UD-Schicht unter einem bestimmten Winkel durchläuft. Die Entstehung neuer Oberflächen während der Ribildung und vor allem die dabei auftretenden plastischen Deformationen erfordern Energie, die aus der bei der Ribildung freigesetzten "Dehnungsenergie" gewonnen wird. Deshalb spielt bei bruchmechanischen Betrachtungen die "Dehnungsenergie-Freisetzungsrates" eine wichtige Rolle. In [75] wurde gezeigt, daß sich mit Hilfe eines Ansatzes auf der Basis der Dehnungsenergie-Freisetzungsrates ein Zf-Bruchkriterium für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung gewinnen lät, das ein quadratisches Polynom der Spannungen σ_2 und τ_{21} ist. Auch kann man aus einem solchen Ansatz zu einer Aussage über den sich einstellenden Bruchwinkel gelangen; z.B. ergibt er sich ohne Berücksichtigung von "innerer Reibung" (Reibkräfte auf den Riflächen) bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung zu $\pm 45^\circ$. Wenn die riauslösenden inneren Defekte als für den Werkstoff typische Risse betrachtet werden, kann die "ungekerbte" Festigkeit mit Hilfe der Bruchzähigkeit und der Größe des Defekts vorhergesagt werden. Vorausgesetzt, daß diese Vorstellungen zutreffend sind, ergibt sich eine Korrelation zwischen den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$ und $R_{\perp\parallel}$.

Wenn für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung eine Bruchbedingung (Gl. (4.6) auf S. 47)

$$F_2\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{21}^2 = 1 \quad (8.4)$$

aufgestellt wurde, so kann diese mit den nominellen Spannungsintensitätsfaktoren K'_2 und K'_6 in folgende Form umgeschrieben werden:

$$A_2K'_2 + A_{22}K'^2_2 + A_{66}K'^2_6 = 1 \quad (8.5)$$

mit

$$K'_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{a_0}} \quad \text{und} \quad K'_6 = \frac{\tau_{21}}{\sqrt{a_0}}.$$

Hierin ist a_0 die halbe Länge eines im Verbund vorhandenen faserparallelen Risses, von dem angenommen wird, daß von ihm der Zfb ausgeht, **Bild 8.2**.

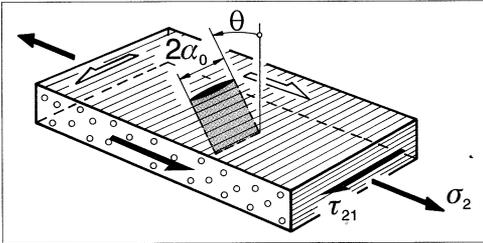


Bild 8.2: Um den Winkel θ geneigter Ri (Fehl-
stelle) der Länge $2a_0$ in einem UD-Verbund bei
kombinierter Beanspruchung durch σ_2 und τ_{21}

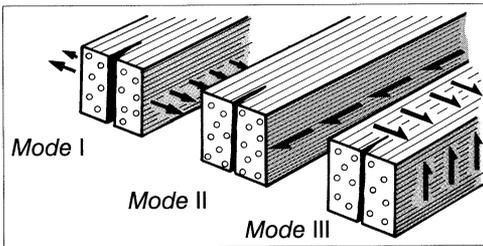


Bild 8.3: Ri-Öffnungs-Modi I, II, III der Bruch-
mechanik. Bei Mode I und II behält der Ri bei sei-
ner Ausbreitung seine ursprüngliche Lage. Bei der
Beanspruchung nach Mode III würde, wenn kein
Ausgangsri bestnde, der erste Anri unter 45°
zur Richtung der Schubspannung entstehen. Der
sich ausbreitende Ri mte sich eigentlich aus der
Ausgangslage allmählich in die 45° -Lage drehen!

Wenn $\sigma_2 > 0$ und $\theta = 0^\circ$ ist, werden K'_2 und K'_6 zu den für Mode I bzw. Mode II, **Bild 8.3**, geltenden Spannungsintensitätsfaktoren K_I bzw. K_{II} . Folglich kann Gl. (8.5) im ersten Quadranten auch als eine sogenannte Mixed Mode-Bruchzhigkeitskurve für ebene (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung aufgefat werden.

Aus den gemessenen Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$ und R_{\parallel} lt sich mit Hilfe bekannter Bruchzhigkeits-Werte K_{Ic} (Mode I) und K_{IIc} (Mode II) die Größe a_0 des inneren Defekts errechnen. Hieraus ergibt sich die Korrelation zwischen $R_{\perp}^{(+)}$ und R_{\parallel} . (Wenn $\sigma_2 < 0$ ist, besteht keine Tendenz zur Ri-Öffnung; in diesem Fall ist $K_I = 0$.)

Das Studium der Arbeit [75] zeigt, da die bruchmechanische Betrachtungsweise für die Weiterentwicklung der Bruchbedingungen der neuen Art hilfreiche Hinweise geben kann. Wegen experimenteller und theoretischer Unzulänglichkeiten erzielten die Autoren mit der "gemischten" Betrachtungsweise aber noch keine befriedigenden Ergebnisse. Sie beklagen, da die Hauptschwierigkeit bei der Aufstellung von Beziehungen zwischen Festigkeiten und Bruchzähigkeiten im Mangel an geeigneten Bruchbedingungen begründet sei.

Im Grunde genommen erscheint es rückblickend recht verwunderlich, daß die durch die Arbeiten von *Hashin* [3] und *Hahn et al.* [75] gegebenen Anregungen nicht früher zu einer intensiven Neubearbeitung des "Problemkreises Bruchkriterien" geführt haben. Vermutlich erklärt sich dies vor allem daraus, daß Bruchversuche mit kombiniert wirkenden Spannungen außerordentlich schwierig durchzuführen sind, so daß die Unzulänglichkeiten der meisten existierenden Bruchbedingungen bislang nicht offenbar geworden sind. Für die hier zu entwickelnden Ansätze zu Zfb-Bedingungen lassen sich aus [75] folgende Schlüsse ziehen:

- Wegen des bruchmechanischen Hintergrunds ist bei den Zfb-Festigkeiten ein merklicher Größen-Einfluß zu erwarten, s. hierzu auch [24].
- Die der Arbeit von *Hashin* [3] zugrundeliegende Vorstellung vom Zusammenwirken der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ bei der Zfb-Erzeugung korrespondiert weitgehend mit der bruchmechanischen Vorstellung von Mixed Mode-Bruchvorgängen aus Mode I, Mode III und Mode II nach Bild 8.3.
- Es besteht eine gewisse Gleichwertigkeit der bruchmechanischen Formulierungen und der "klassischen" Ansätze der Bruchbedingungen mit Spannungen und Festigkeiten. Von dort her gesehen gibt es somit keine schwerwiegenden Bedenken dagegen, die in der Ingenieurpraxis geläufige "klassische" Form der Bruchbedingungen beizubehalten.
- Wegen des Zusammenhangs mit der Dehnungsenergie-Freisetzungsrates ist zu erwarten, daß bei den Zfb-Bedingungen eine befriedigende Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen am ehesten mit Ansätzen in Form von Polynomen erreicht werden kann, in denen die Spannungen in der 2. Ordnung auftreten.
- Auch für die Beantwortung noch offener Fragen der Statistik, die sich im Zusammenhang mit der Anwendung von Bruchkriterien stellen, worauf *Hashin* in [3] hingewiesen hat, können die bruchmechanischen Modelle hilfreich sein [75].

8.2.2 Erweiterte Bruchhypothese

Hashin hat in [3] darauf aufmerksam gemacht, daß für den Fall einer auf der Bruchebene wirkenden Druckspannung $\sigma_n < 0$ ein anderer Ansatz nötig sei als für den Fall der Zugspannung $\sigma_n \geq 0$, für den er exemplarisch einen einfachen Ansatz angegeben hatte. Deshalb erschien es vordringlich, einen physikalisch plausiblen Ansatz für $\sigma_n < 0$ zu entwickeln. Dazu sind bereits in [11] einige Überlegungen angestellt worden, die hier vertieft werden.

Zu diesem Zweck wird zunächst ein UD-Verbund betrachtet, von dem man sich modellhaft vorstellt, daß er aus homogener, transversal-isotroper Materie (mit Rotationssymmetrie bezüglich der x_1 -Achse) besteht. Er sei mit einer einachsigen Quer-Druckspannung, z.B. mit

$\sigma_2 < 0$ beansprucht, alle anderen Spannungen seien "null". In Schnittebenen, in denen σ_2 wirkt, besteht gewiß keine Tendenz zu einem Bruch, denn es ist kein Grund ersichtlich, warum sich beidseitig an eine Wirkebene von σ_2 angrenzende Werkstoffpartien voneinander trennen sollten. Im Gegenteil, die Druckspannung σ_2 nähert die ihrer Wirkebene benachbarten Werkstoffpartien einander an, so daß man stattdessen eher eine mit dieser "Verdichtung" einhergehende Festigkeitserhöhung erwarten könnte.

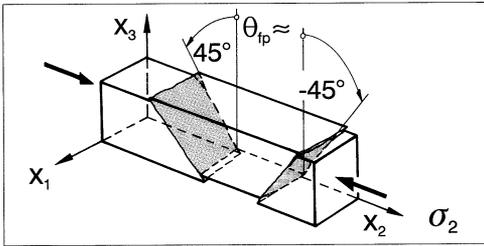


Bild 8.4: "Schräge" Brüche eines sich spröde verhaltenden Stoffes unter einachsiger Druckbeanspruchung σ_2

Aus Versuchen an quader- oder zylinderförmigen Probekörpern aus Stoffen, die sich spröde verhalten, ist bekannt, daß der Bruch nie in einer Schnittebene auftritt, in der die "äußere" Druckspannung σ_2 wirkt. Stattdessen entsteht ein Bruch auf "schrägen" Schnittebenen, die – grob gesprochen – um etwa $+45^\circ$ oder -45° gegen die Richtung der "äußeren" Druckspannung geneigt sind, **Bild 8.4**. (Später wird gezeigt, daß der Winkelbetrag meistens etwas größer als 45° ist). Auf diesen Schnittebenen tritt die maximale Schubspannung ($\mp \frac{1}{2}\sigma_2 \sin 2\theta_{fp}$) auf, vgl. (8.1) auf S. 108. Sie ist dem Betrage nach halb so hoch wie die "äußere" Druckspannung. Man muß hieraus schließen, daß ein sogenannter "Druckbruch" in Wirklichkeit ein durch Schub verursachter Bruch ist.

Auf den um $\pm 45^\circ$ geneigten Bruchebenen wirkt nach (8.1) zusätzlich zur maximalen Schubspannung eine "innere" Druckspannung ($\sigma_2 \cos^2 \theta_{fp}$), die – ebenso wie die maximale Schubspannung – halb so hoch ist, wie die "äußere" Druckspannung σ_2 . Diese auf der Bruchebene wirkende Druckspannung wird in Anbetracht der Vorstellung von einer Verdichtung des Werkstoffs sicher nicht den Bruch mitverursachen; wenn sie überhaupt Einfluß auf das Bruchgeschehen nimmt, behindert sie eher die Ausbildung des Schubbruches durch einen reibungsähnlichen Widerstand. Darauf, daß ein solcher den Bruch behindernder Einfluß der Druckspannung vorhanden ist, deutet hin, daß Bruchwinkel gemessen werden, z.B. bei Grauguß [76], die etwas größer als 45° sind. Dies erklärt sich aus **Bild 8.5**.

Es gibt ein Indiz dafür, daß eine solche Behinderung des Schubbruches durch eine gleichzeitig mit der Schubspannung auf der Bruchebene wirkende Druckspannung auch bei UD-FKV auftritt. Und zwar ist dies die bekannte Tatsache, daß bei der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve im Bereich kleiner Druckspannungen $\sigma_2 < 0$ die ertragbare Schubspannung τ_{21} zunächst mit zunehmender Druckspannung ansteigt, und zwar bis zu Werten, die 10 bis 30 % über der

Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ bei reiner τ_{21} -Beanspruchung liegen können. Erst wenn die Druckspannung σ_2 dem Betrage nach größer wird als etwa die halbe Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, fällt die ertragbare Schubspannung τ_{21} wieder ab, s. Bild 5.2 auf S. 64. Aufgrund von Berechnungen für den Bruchwinkel θ_{fp} mit Hilfe des später beschriebenen Modells gelangt man zu dem Ergebnis, daß im Bereich der Bruchkurve, in der τ_{21} mit $|\sigma_2|$ ansteigt, der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, d.h., daß der Bruch auf der Schnittebene eintritt, auf der τ_{21} und σ_2 gemeinsam wirken. Wenn dies zutrifft, läßt sich der Anstieg der ertragbaren Schubspannung τ_{21} mit einer Behinderung des Schubbruchs durch "innere Reibung" infolge $\sigma_2 < 0$ deuten.

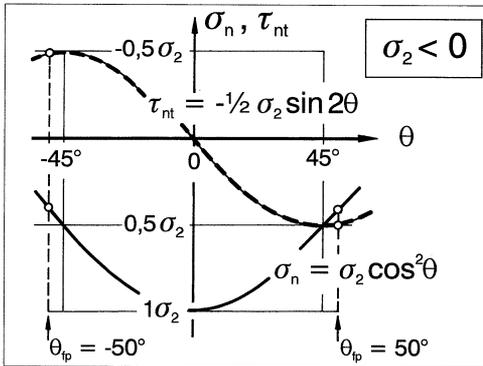


Bild 8.5: Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ bei einachsiger Druckbeanspruchung σ_2 . Bei $\theta = \pm 45^\circ$ sind σ_n und τ_{nt} dem Betrage nach gleich groß. Vergrößert sich der Winkelbetrag auf $|\theta_{fp}| > 45^\circ$, so nimmt die bruchwirksame Schubspannung τ_{nt} nur wenig ab, die bruchbehindernde Druckspannung $|\sigma_n|$ aber sehr stark. Deshalb stellt sich ein Bruchwinkel $|\theta_{fp}| > 45^\circ$ ein.

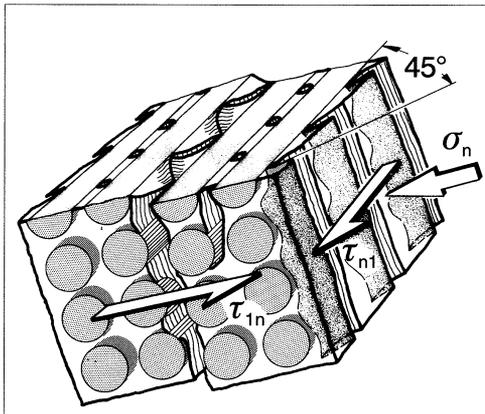


Bild 8.6: Mikromechanisch betrachtetetes Bruchgeschehen bei kombinierter $\tau_{\perp\parallel}$ - und $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung (Grafik: K. Strube)

Mikromechanische Betrachtungen erhärten die Vorstellung, daß Druckspannung $\sigma_n < 0$ den Schubbruch infolge τ_{n1} erschwert. Bei fester Haftung zwischen Faser und Matrix spielt sich das Mikro-Bruchgeschehen bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung vorwiegend in der Matrix ab. In einer spröden Matrix treten die ersten Mikrorisse infolge der Haupt-Zugspannung unter etwa 45° zur Faserrichtung auf, **Bild 8.6**. Die für die Entstehung dieser ersten Mikrorisse

verantwortliche Haupt-Zugspannung in der Matrix wird durch eine quer zu den Fasern wirkende Druckspannung herabgesetzt.⁵ Die Mikrorisse werden, sobald sie auf die hochfesten Fasern treffen, gestoppt. Mehrere Mikrorisse können sich zu kammartigen Teilbrüchen vereinigen. Diese werden durch eine zusammen mit τ_{n1} wirkende σ_n -Druckspannung ineinander gedrückt, so daß auch diese gebrochenen Bereiche noch Schubkraft übertragen.

Ferner kann man sich vorstellen, daß an Fehlstellen wie Lufteinschlüssen und unverbundenen Stellen der Faser/Matrix-Grenzfläche auftretende lokale Zugspannungsspitzen durch die überlagerte Druckspannung gemildert werden, so daß der bruchfördernde Einfluß dieser Fehlstellen verringert wird.

Die Wirkung all dieser mikromechanischen Effekte kann man makromechanisch als eine Art "inneren Reibungswiderstand" beschreiben, der mit steigender Druckspannung zunimmt und sich zum ursprünglichen, d.h. dem bei reiner Schubbeanspruchung wirksamen, Schubbruchwiderstand der Wirkebene addiert. Damit gelangt man zu der folgenden präzisierten und erweiterten Bruchhypothese:

1. **Wenn unter der Wirkung einer Quer-Zugspannung ($\sigma_n \geq 0$) eine faserparallele Bruchebene auftritt, so wird der Bruch gemeinsam von der auf der Bruchebene (im Augenblick des Bruches) wirkenden Quer-Zugspannung σ_n und den dort gleichzeitig wirkenden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursacht.**
2. **Eine auf einer Bruchebene wirkende Quer-Druckspannung ($\sigma_n < 0$) trägt nicht zur Erzeugung des Bruches bei, sondern erschwert den durch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursachten Schubbruch, indem sie einen mit steigender Druckspannung $|\sigma_n|$ anwachsenden zusätzlichen Widerstand der Spannungs-Wirkebene gegen Schubbruch hervorruft.**
3. **Bei ebener Beanspruchung in der transversal-isotropen Ebene tritt der Bruch entweder als ein durch Druckspannung σ_n behinderter Schubbruch infolge τ_{nt} oder als reiner Zugbruch infolge von σ_n als größter Haupt-Zugspannung ein, je nachdem, welche Bruchmöglichkeit zuerst erreicht wird.**

Die dritte Aussage beruht auf der Erkenntnis, daß die *Coulomb, Mohr*-Bruchhypothese für isotrope Stoffe, die sich "wahrhaft" spröde (intrinsically brittle) verhalten, das Bruchgeschehen bei reiner Schubbeanspruchung nicht richtig beschreibt [76]. Diese Stoffe brechen nämlich bei reinem Schub unter der Wirkung der maximalen Haupt-Normalspannung, d.h.

⁵Schon dieser Effekt allein könnte den Anstieg der ertragbaren Schubspannung τ_{21} mit steigender Druckspannung $|\sigma_2|$ erklären.

unter $+45^\circ$ zur Richtung der Schubspannung. Der 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese stellt eine auf die Situation am UD-Verbund umgeschriebene Fassung der von *Paul* [76] 1961 publizierten Modifikation der *Coulomb, Mohr*-Bruchhypothese dar.

Die dreiteilige Bruchhypothese ist die Basis der später aufgestellten Bruchbedingungen.

Es ist zu hoffen, daß wegen der Verwandtschaft zwischen den bruchrelevanten Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ und den bruchmechanischen Modi I, III, II erstmalig ein Brückenschlag zwischen den "klassischen" Ingenieur-Bruchbedingungen und den bruchmechanischen Ansätzen [74,75] gelingt.

8.3 Die neuen "Festigkeits"-Parameter

8.3.1 Grundsätzliche Überlegungen

Die Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese erfordert nicht nur das "Umsteigen" vom Schicht-Koordinatensystem in das bewegliche, wirkebenebezogene Koordinatensystem, sondern auch ein Umdenken bei den "Festigkeits"-Parametern, mit denen die Bruchbedingungen an den jeweiligen Werkstoff angepaßt werden müssen. Weil dies offenbar – wie die Erfahrung lehrt – gewisse Schwierigkeiten bereitet, soll bereits an dieser Stelle, noch bevor konkrete Ansätze für Bruchbedingungen gemacht werden, eine prinzipielle Klärung erfolgen.

Generell gilt, daß sowohl das reale Bruchverhalten eines Werkstoffs bei kombinierter Beanspruchung als auch die zu dessen Modellierung benutzte Bruchbedingung sich im Spannungsraum jeweils als eine Bruchfläche darstellt, bei der jeder Punkt einer solchen Fläche zu einem Spannungszustandsvektor gehört, der real bzw. theoretisch zum Bruch führt (oder auch gerade noch ohne Bruch ertragen werden kann). Eine vollständige Übereinstimmung der modellierten Bruchfläche mit derjenigen, die das reale Bruchverhalten darstellt, ist nicht erreichbar, weil das mathematische Modell (die Bruchbedingung) das komplizierte reale Bruchgeschehen allenfalls grob vereinfacht wiedergeben kann. Nur wenn die Bruchfunktion⁶ auf einer physikalischen Modellvorstellung (Bruchhypothese) beruht, wie es bei den Bruchbedingungen der neuen Art der Fall ist, darf man überhaupt eine hinlängliche Annäherung an die Wirklichkeit erwarten. Dies ist vor allem für solche Spannungskombinationen von Bedeutung, die versuchstechnisch nicht oder nur schwer verwirklicht werden können.

Eine Anpassung des Modells an die Realität kann immer nur punktuell vorgenommen werden. Dies geschieht, indem einige wenige Punkte der modellierten Bruchfläche mit Ergebnissen von Bruchversuchen zur Deckung gebracht werden. Hierzu dienen einige in der Bruchfunktion enthaltene werkstoffspezifische Parameter. Bei den herkömmlichen Bruch-

⁶Mit *Bruchfunktion* wird hier die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehende Funktion der für den Bruch relevanten Spannungen bezeichnet.

bedingungen werden zur Anpassung in erster Linie die Punkte benutzt, in denen die Spannungsachsen die Bruchfläche durchstoßen. Diese repräsentieren die Spannungen σ bzw. τ , die bei einachsiger Zug- oder Druckbeanspruchung oder bei einer reinen Schubbeanspruchung des Werkstoffs zum Bruch, d.h. zu einer Anstrengung $\mathcal{E} = 1$, führen.

Das Gesetz vom Gleichgewicht der Kräfte besagt, daß nur dann eine Kraft auf einen Körper einwirken kann, wenn der Körper der einwirkenden Kraft (actio) eine gleich große, aber umgekehrt gerichtete Gegenkraft (reactio) entgegensetzt. Deshalb darf eine zum Bruch führende, auf den Körper einwirkende Bruchspannung σ oder τ mit der entsprechenden höchstmöglichen Gegenwirkung (Resistance) R gleichgesetzt werden, die der Körper der Bruchursache σ bzw. τ entgegenzusetzen vermag und die überwunden werden muß, damit der Bruch entsteht. So erklärt es sich, daß bei herkömmlichen Bruchbedingungen als Parameter in der Bruchfunktion für Zfb die Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp}^{(-)}$, $R_{\perp\perp}$, $R_{\perp\parallel}$ erscheinen.⁷ Die Bruchbedingungen werden mit den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ und den Festigkeiten so abgefaßt, daß, wenn nur eine dieser Spannungen allein auftritt, lediglich $(\sigma_2/R_{\perp}^{(+)}) = 1$ bzw. $(\sigma_2/R_{\perp}^{(-)}) = 1$; (desgl. für σ_3) oder $(\tau_{23}/R_{\perp\perp}) = 1$ usw. übrigbleibt.

8.3.2 Einführung des Bruchwiderstands der Wirkebene

Bei den Bruchbedingungen der neuen Art wird in analoger Weise wie bei den herkömmlichen Bruchbedingungen verfahren. Hierbei muß jedoch beachtet werden, daß Punkte einer Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ - Spannungsraum nicht einfach nur Spannungen darstellen, bei denen irgendwo im Körper der Bruch stattfindet, sondern daß es sich bei $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ um diejenigen Spannungen handelt, die auf der sich einstellenden Bruchebene auftreten. Die Spannungscombination aus $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ hat zur Folge, daß, wenn die Bruchbedingung erfüllt ist, der **Bruch in der gemeinsamen Wirkebene der drei Spannungen** eintritt. Durch die Bruchbedingung muß deshalb eine Beziehung zwischen diesen drei Spannungen und den **Bruchwiderständen ihrer Wirkebene** hergestellt werden. Hierzu wird der Begriff "Bruchwiderstand der Wirkebene" eingeführt und folgendermaßen definiert:

Der Bruchwiderstand der Wirkebene⁸ ist derjenige Widerstand, den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen auf ihr wirkenden Spannung (σ_n oder τ_{nt} oder τ_{n1}) entgegensetzt.

⁷Durch eine *Festigkeit* wird nur die Höhe der beim Bruch (Versagen) infolge einer einachsigen Beanspruchung oder reinen Schubbeanspruchung auftretenden Spannung angegeben; sie vermittelt keine Information über die Bruchart und den Ort des Bruches.

⁸Der Begriff der Wirkebene hat in dieser Arbeit eine andere Bedeutung als in [11]. Dort bezeichnet er eine Ebene, in der die zu einem ebenen Spannungszustand gehörenden Kräfte wirken. Hier ist eine Schnittebene gemeint, auf der eine Normalspannung und/oder eine Schubspannung wirkt.

Zur Unterscheidung von einer Festigkeit R wird ein Bruchwiderstand der Wirkebene (Action plane, A), der die gleiche Dimension wie eine Spannung hat, mit dem Symbol R^A bezeichnet. Entsprechend den durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ verkörperten drei Beanspruchungen $\sigma_{\perp}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ gibt es drei verschiedene Bruchwiderstände der Wirkebene:

$$\begin{aligned} R_{\perp}^{(+A)} &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer-} \\ &\quad \text{Zugbeanspruchung } \sigma_{\perp}^{(+)}, \\ R_{\perp\perp}^A &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer/Quer-} \\ &\quad \text{Schubbeanspruchung } \tau_{\perp\perp}, \\ R_{\perp\parallel}^A &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer/Längs-} \\ &\quad \text{Schubbeanspruchung } \tau_{\perp\parallel}. \\ (R_{\perp}^{(-A)}) &= \infty, \text{ weil eine Quer-Druckbeanspruchung } \sigma_{\perp}^{(-)} \text{ keinen Bruch in ihrer Wirk-} \\ &\quad \text{ebene verursachen kann.} \end{aligned}$$

Wegen des für das idealisierte Modell angenommenen gleichmäßigen rotationssymmetrischen Aufbaus des UD-Verbunds sind die Bruchwiderstände R^A auf allen faserparallelen Schnitten gleich groß; sie werden deshalb als vom Winkel θ unabhängige Größen eingeführt. Damit ist die transversale Isotropie modelliert. Die Forderung nach Invarianz wird – wie sich später zeigt – dadurch erfüllt, daß in einem 180° -Winkelbereich immer die am höchsten bruchgefährdete Schnittebene gefunden wird, unabhängig von der Ausgangsstellung des drehbaren Koordinatensystems.

Ebenso wie die Festigkeiten R werden die Bruchwiderstände R^A stets als positive Werte angegeben.

Damit gelangt man nun schon zu einer ersten Vorstellung davon, wie eine Bruchbedingung der neuen Art aussehen kann. Da sie nach Abschnitt 8.2.1 möglichst 2. Ordnung in den Spannungen sein sollte, kommt als einfachster Ansatz der folgende in Betracht [11]:

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+A)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (8.6)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (8.7)$$

Gl. (8.7) bringt noch nicht die "innere Reibung" bei $\sigma_n < 0$ zum Ausdruck.

Da der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen Quer-Druckbeanspruchung $R_{\perp}^{(-A)} = \infty$ ist, bleibt die Master-Bruchfläche in Richtung negativer σ_n -Spannungen offen, **Bild 8.7**; sie ist im Bereich $\sigma_n < 0$ ein Zylinder mit elliptischem Querschnitt.

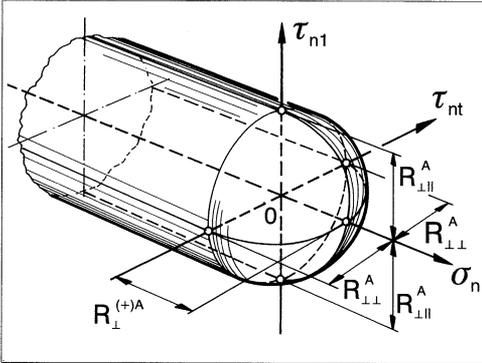


Bild 8.7: Darstellung der Bruchbedingungen (8.6) und (8.7) als Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{nl})$ -Spannungsraum

8.3.3 Übereinstimmungen mit Festigkeiten

Bei der Bestimmung des Bruchwiderstands der Wirkebene treten dadurch Schwierigkeiten auf, daß bei reiner Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$ der Bruch nicht in der Wirkebene der betreffenden Spannung erfolgt, sondern auf einer gegenüber der Wirkebene geneigten Schnittenebene. Es gibt aber durchaus Fälle, in denen ein Bruchwiderstand R^A mit der entsprechenden konventionellen Festigkeit R identisch ist, und zwar ist dies definitionsgemäß dann der Fall, wenn **beim Bruchversuch mit einer einzelnen** an einem UD-Verbund wirkenden **Spannung der Bruch in ihrer Wirkebene** eintritt. Wann dies zu erwarten ist, soll im folgenden für die drei in Betracht kommenden Beanspruchungen theoretisch untersucht werden.

8.3.3.1 Quer/Längs-Schubbeanspruchung

Man kann sich relativ einfach davon überzeugen, daß $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$ gelten muß, d.h. daß bei reiner $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbeanspruchung der Bruchwiderstand der Wirkebene und die Festigkeit identisch sind. Dazu sei angenommen $\tau_{21} \neq 0$ und alle anderen Spannungen "null". Auf Schnittebenen, die gegen die Wirkebene von τ_{21} um einen Winkel θ geneigt sind, ist die dort auftretende Schubbeanspruchung ($\tau_{21} \cos \theta$) kleiner als in der Wirkebene von τ_{21} , und es wirkt dort auch keine weitere Spannung, **Bild 8.8**. Da der Bruchwiderstand $R_{\perp\parallel}^A$ über dem Winkel θ konstant ist, muß der Bruch beim Höchstwert der Schubspannung, also bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ eintreten, d.h. auf der Wirkebene von τ_{21} . Der Bruch erfolgt, sobald $\tau_{21} = R_{\perp\parallel}$ wird. Aus der Bruchbedingung, Gl. (8.6) oder (8.7), folgt somit:

$$R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}. \quad (8.8)$$

Da sich dies unabhängig von den Festigkeitsverhältnissen ergibt, gilt (8.8) generell; deshalb wird auch in den noch folgenden Bruchbedingungen $R_{\perp\parallel}$ anstelle von $R_{\perp\parallel}^A$ benutzt.

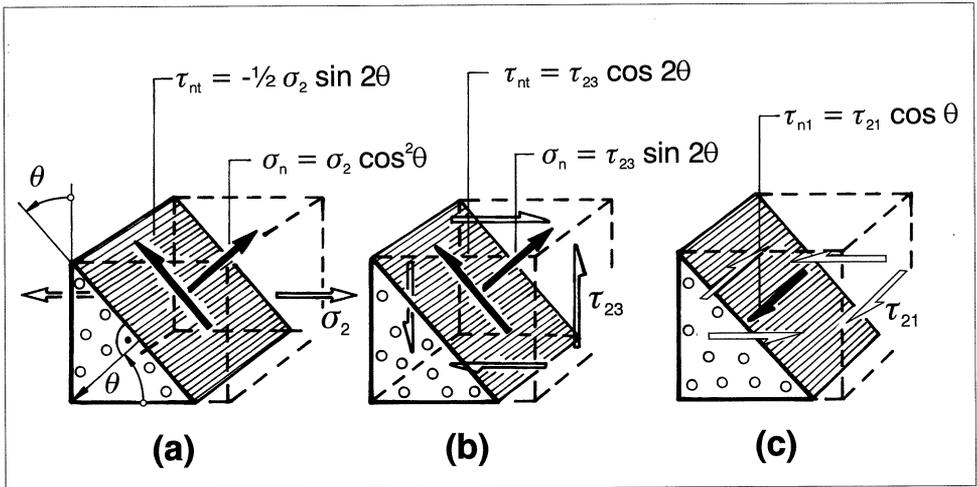


Bild 8.8: Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ ; (a) bei einachsiger $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung; (b) bei reiner $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung; (c) bei reiner $\tau_{\parallel\parallel}$ -Beanspruchung

Bei dieser Art der Schubbeanspruchung läßt sich der Unterschied zwischen einer Festigkeit und einem Bruchwiderstand sehr gut verdeutlichen. So gibt es natürlich nur eine Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$, aber zwei verschiedene Bruchwiderstände der Wirkebene, nämlich $R_{\perp\parallel}^A$ und $R_{\parallel\perp}^A$. Dabei ist auf der faserparallelen Schnittebene, wie soeben gezeigt, $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$, aber auf der quer durch die Fasern verlaufenden Schnittebene ist $R_{\parallel\perp}^A > R_{\perp\parallel}^A$, weshalb der Bruch immer auf der faserparallelen Ebene erfolgt. Auf dieser wirkt eine gleich hohe Schubspannung, aber sie hat den niedrigeren Bruchwiderstand der Wirkebene, weil bei ihrem Bruch keine Fasern durchtrennt werden müssen, s. auch Bild 1.2 auf S. 4. Bei der Torsionsprüfung an 90°-Rohren erfolgt der Bruch stets in Umfangsrichtung [24].

8.3.3.2 Quer-Zugbeanspruchung

Bei einer einachsigen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung wird man normalerweise, insbesondere bei sich spröde verhaltenden Stoffen, einen Bruch in der Wirkebene der angebrachten Quer-Zugspannung erwarten; für eine einachsige σ_2 -Zugbeanspruchung würde das heißen bei $\theta_{fp} = 0^\circ$. Es kann aber nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden, daß der Bruch auf einem "schrägen" Schnitt, d.h. bei $\theta_{fp} \neq 0^\circ$, erfolgt. Auf einem solchen Schnitt wirkt gemäß (8.1) eine kombinierte Beanspruchung, die sich aus der $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung ($\sigma_2 \cos^2 \theta$) und der $\tau_{\perp\perp}$ -Schubbeanspruchung ($-\frac{1}{2}\sigma_2 \sin 2\theta$) zusammensetzt, Bild 8.8. Somit ist die Bruch-

gefahr nicht allein von $R_{\perp}^{(+A)}$ abhängig, sondern wird von $R_{\perp\perp}^A$ mitbestimmt. Vorausgesetzt, die Gl. (8.6) und (8.7) würden das Bruchgeschehen bei kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp})$ -Beanspruchung richtig beschreiben, so würden "schräge Brüche" nur dann auftreten, wenn $R_{\perp\perp}^A/R_{\perp}^{(+A)} \leq 1/\sqrt{2}$ wäre. Solche Verhältnisse, in denen der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung kleiner ist als derjenige gegen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung, sind aber für die Betrachtungen in diesem Buch durch den 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese (S. 115) ausgeschlossen. Dieser hat nämlich zur Voraussetzung, daß der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung größer ist als gegen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung. Deshalb wird in dieser Arbeit $R_{\perp}^{(+A)}$ durch $R_{\perp}^{(+)}$ ersetzt, wohl wissend, daß dies nicht generell, sondern nur bei Voraussetzung des 3. Satzes der erweiterten Bruchhypothese gilt, durch den der "schräge" Zugbruch ausgeschlossen wird.

8.3.3.3 Quer/Quer-Schubbeanspruchung

Bei einer reinen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung, z.B. realisiert durch eine Schubbeanspruchung τ_{23} , Bild 8.8, gibt es zwei ausgezeichnete faserparallele Schnittebenen, auf denen nur eine einzige Spannung wirkt, die einen Bruch verursachen könnte. Das ist zum einen die Wirkebene von τ_{23} bei $\theta = 0^\circ$ (oder τ_{32} bei $\theta = \pm 90^\circ$), zum anderen die Schnittebene bei $\theta = +45^\circ$, auf der die maximale Haupt-Zugspannung herrscht, die dem Betrage nach gleich hoch ist wie die angelegte Schubspannung τ_{23} , vgl. (8.1), s. hierzu auch Bild 8.11 auf S. 128. Vorausgesetzt, daß unsere Bruchhypothese zutrifft, tritt der Bruch in der Schnittebene ein, die den kleineren Bruchwiderstand der Wirkebene aufweist. Bei Versuchen an UD-FKV wurden bisher offenbar stets Brüche bei $\theta_{fp} = +45^\circ$ beobachtet, woraus geschlossen werden muß, daß in diesen Fällen $R_{\perp}^{(+A)} < R_{\perp\perp}^A$ war. Aus dem reinen $\tau_{\perp\perp}$ -Bruchversuch würde man also in einem solchen Fall einen Wert für $R_{\perp}^{(+A)}$, nicht aber für $R_{\perp\perp}^A$ erhalten.

Wenn der 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese gilt, kann man keinen Beanspruchungszustand realisieren, bei dem auf einer Schnittebene als einzige Spannung eine $\tau_{\perp\perp}$ -Schubbeanspruchung auftritt und gleichzeitig (bei $R_{\perp\perp}^A > R_{\perp}^{(+A)}$) der Bruch in dieser Wirkebene der $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung stattfindet. Als Notbehelf für die Ermittlung von $R_{\perp\perp}^A$ bietet sich deshalb nur die indirekte Bestimmung aus einem einfach durchzuführenden einachsigen $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Druckversuch an, z.B. mit $\sigma_2 < 0$, alle anderen Spannungen "null". Bei einem solchen Druckversuch erfolgt der Bruch auf Schnittebenen mit einem Neigungswinkel $\theta_{fp} \approx \pm 45^\circ$. Dort tritt unvermeidlich eine Kombination von $\tau_{\perp\perp}$ und $\sigma_{\perp}^{(-)}$ auf, so daß man eine sicher mit Fehlern behaftete Bruchbedingung für kombinierte Beanspruchung heranziehen muß, um zumindest eine Rechengröße für $R_{\perp\perp}^A$ aus der gemessenen Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ zu ermitteln. Benutzt man hierzu die Gl. (8.7), so erhält man $\theta_{fp} = \pm 45^\circ$ und $R_{\perp\perp}^A = \frac{1}{2}R_{\perp}^{(-)}$. Wenn aber die "innere Reibung" berücksichtigt wird, ergibt sich $R_{\perp\perp}^A$ etwas kleiner als $\frac{1}{2}R_{\perp}^{(-)}$.

8.3.4 Empfehlungen zur Fehlervermeidung

Unsicherheiten bei der Bestimmung der in den neuartigen Bruchbedingungen enthaltenen Festigkeitsparameter sollten möglichst dadurch ausgeschlossen werden, daß bei den zur Parameterbestimmung benutzten Bruchversuchen nicht nur die zum Bruch führenden Spannungen, sondern auch die auftretenden Bruchwinkel gemessen werden. Wie weit dies versuchstechnisch möglich ist, wird z. Zt. untersucht [15].

Wenn in den später aufzustellenden Bruchbedingungen $R_{\perp}^{(+)}$ anstelle $R_{\perp}^{(+A)}$ benutzt wird, sollte man sich stets dessen bewußt sein, daß dies nicht generell, sondern nur bei Voraussetzung des 3. Satzes der erweiterten Bruchhypothese zulässig ist!

8.3.5 Die "Neigungs"-Parameter

Zur Anpassung der Modelle an die Realität werden später noch weitere Parameter benutzt, die Neigungen an bestimmten Stellen von Bruchkurven angeben, vgl. Abschnitt 5.1.2.

Während die Parameter $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp\perp}^A$, $R_{\perp\parallel}$ aus Bruchversuchen mit einachsiger⁹ $\sigma_{\perp}^{(+)}$ - bzw. $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und aus einem Bruchversuch mit reiner $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung stammen, benötigt man zur Festlegung der Neigungs-Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(+)}$, $p_{\perp\perp}^{(+)}$ experimentell ermittelte Neigungen von Bruchkurven für kombinierte Beanspruchungen.

Die Werte $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ finden sich als die Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$, wobei $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ die Neigung der Kurve für den Bereich $\sigma_2 \geq 0$ ist und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ die Neigung der Kurve für $\sigma_2 \leq 0$, s. Bild 5.1 auf S. 61.

Für UD-Glasfaserkunststoff mit Epoxidharz-Matrix wurde $p_{\perp\parallel}^{(-)} \approx 0,10$ bis $0,30$ und $p_{\perp\parallel}^{(+)} \approx 0,15$ bis $0,45$ gefunden.

Weil sich beim Wirkebenen-Bruch durch $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung, z.B. im Druckversuch, wahrscheinlich eine etwas weniger zerklüftete Bruchebene ergibt als beim Bruch durch $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, kann vermutet werden, daß der Wert für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ etwas kleiner als der $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert ist. Erwartet wird

$$0,5 \leq \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{p_{\perp\parallel}^{(-)}} \leq 1.$$

Für die Bestimmung der p-Parameter zweckmäßig erscheinende Versuchstechniken werden z.Zt. entwickelt [15].

⁹Wenn zweiachsige Zugversuche mit $\sigma_2 = \sigma_3$, d.h. $\tau_{\perp\perp} = 0$, durchgeführt werden könnten, würde man mit Sicherheit das richtige $R_{\perp}^{(+A)}$ ermitteln, auch wenn der einachsige Zugversuch zu schrägen Brüchen führt.

8.3.6 Anhaltswerte für Werkstoffparameter

Solange für einen bestimmten UD-Verbundwerkstoff noch keine speziellen experimentellen Ergebnisse vorliegen, empfiehlt es sich, folgende Schätzwerte anzunehmen:

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)} = 0,15 \quad ; \quad p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,20 \quad ; \quad p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,30.$$

Die **Tabelle 8.1** enthält Anhaltswerte für die wichtigsten in den Bruchbedingungen vorkommenden Parameter. Diese stammen im wesentlichen aus Experimenten mit Glasfaser/Epoxidharz-Verbunden. Ähnliche Werte werden im allgemeinen für CFK erhalten, oft ist allerdings $R_{\perp}^{(+)}$ etwas niedriger und $R_{\perp}^{(-)}$ etwas höher.

Tabelle 8.1: Anhaltswerte für in den Bruchbedingungen als Parameter enthaltene Werkstoffeigenschaften

Werkstoffeigenschaft	Bereich	Mittelwert
Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$	40 ÷ 80 N/mm^2	60 N/mm^2
Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$	120 ÷ 240 N/mm^2	180 N/mm^2
Bruchwiderstand der Wirkebene $R_{\perp\perp}^A$	50 ÷ 100 N/mm^2	75 N/mm^2
Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$	60 ÷ 100 N/mm^2	80 N/mm^2
Neigungsmaß $p_{\perp\parallel}^{(-)}$	0,1 ÷ 0,3	0,2
Neigungsmaß $p_{\perp\parallel}^{(+)}$	0,15 ÷ 0,45	0,3

Für die später angeführten Rechenbeispiele werden Rechenwerte benutzt, die weitgehend den in der Tabelle angeführten Mittelwerten entsprechen, und es wird $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$ gesetzt, wobei $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\perp}^A / R_{\perp\parallel}$ angenommen wird.

8.4 Mathematische Grundlagen

8.4.1 Mathematisch ausgerichtete Arbeiten

Mathematische Aspekte der neuartigen Bruchanalyse werden eingehend von *Jeltsch-Fricker* in [55] behandelt. Sie untersucht die topologischen Beziehungen zwischen dem Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum und dem Master-Bruchkörper im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse besitzen große prinzipielle Bedeutung. Hier können jedoch nur für die praktische Anwendung der neuen Bruchanalyse wichtige Gesichtspunkte besprochen werden.

Eine für die Visualisierung der teilweise recht komplizierten Zusammenhänge sehr hilfreiche Software ist in Form der Rechenprogramme *Brukan* (Bruchkurvenanalyse) [77] und *Brukan-Visual 3D* [78] erarbeitet worden.

Eine zum praktischen Arbeiten mit der neuen Bruchanalyse nützliche Software soll auch im Rahmen eines vom BMBF geförderten Forschungsprojekts [79] entwickelt werden.

8.4.2 Die Bruchfunktion

Die im Abschnitt 8.2.2 aufgestellte Bruchhypothese ermöglicht es, zur Formulierung der Bruchbedingung Bruchfunktionen mit den Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auf der Bruchebene anzusetzen. Mit den auf das Schichtkoordinatensystem bezogenen Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$, wie man sie direkt aus der Spannungsanalyse erhält, ist eine entsprechende physikalisch begründete mathematische Formulierung a priori nicht möglich. In diesen Spannungsraum gelangt man immer nur, wenn zuvor im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum der Bruchwinkel θ_{fp} ermittelt worden ist.

Bei der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 mußten die Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$ unterschieden werden. Demgemäß wird man für diese beiden Fälle voraussichtlich auch bei der Formulierung der Bruchbedingung zwei verschiedene Funktionen benutzen müssen. Die Bruchhypothese allein kann zunächst nur eine vage Vorstellung von den beiden Teilen des Master-Bruchkörpers vermitteln, die an der Stelle $\sigma_n = 0$ möglichst "nahtlos" ineinander übergehen sollten.

Im Fall $\sigma_n > 0$ wirken $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ bei der Ausbildung des Bruches zusammen. Die Bruchhypothese schließt nicht aus, daß auch die Normalspannung σ_n allein einen Bruch in ihrer Wirkebene hervorrufen kann, und die alltägliche Erfahrung beim Quer-Zugversuch bestätigt dies. Insofern kann man bereits aus der Bruchhypothese und den weiteren Betrachtungen im Abschnitt 8.2 herleiten, daß die Bruchfläche im Bereich $\sigma_n \geq 0$ die Form einer geschlossenen Kuppel hat. Da eine Druckspannung $\sigma_n < 0$ ohne die Wirkung von Schubspannungen τ_{nt} und/oder τ_{n1} keinen Bruch in ihrer Wirkebene erzeugen kann, sondern statt dessen beim Vorhandensein von τ_{nt} und/oder τ_{n1} nur den Schubbruch erschwert, wird die Master-Bruchfläche im Bereich $\sigma_n < 0$ die Form eines in negativer σ_n -Richtung sich öffnenden Trichters haben, **Bild 8.9**.

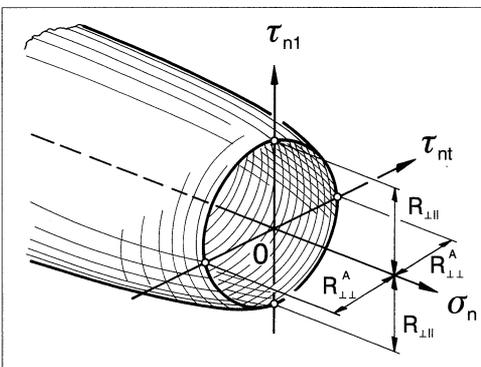


Bild 8.9: Die Master-Bruchfläche ist im Bereich $\sigma_n < 0$ eine sich trichterförmig öffnende Fläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum.

In jedem Fall sind die neuartigen Bruchbedingungen von der generellen Form der Gl. (8.2), oder in korrekterer Schreibweise:

$$F(\sigma_n(\theta_{fp}), \tau_{nt}(\theta_{fp}), \tau_{n1}(\theta_{fp})) = 1. \quad (8.9)$$

Die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehende Funktion wird als die "Bruchzustände charakterisierende Funktion" oder kurz "Bruchfunktion" bezeichnet. Für sie gelten sinngemäß die Ausführungen nach Abschnitt 4.1 und 4.2. Sie soll stetig differenzierbar sein und muß folgende Eigenschaft besitzen:

Ist für einen Spannungszustand $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ die Gl. (8.9) erfüllt, d.h. geometrisch gesehen, liegt der Punkt $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ auf der durch die Gl. (8.9) definierten Master-Bruchfläche, so ist $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) < 1$ für $0 \leq \lambda < 1$ und $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) > 1$ für $\lambda > 1$.

Bemerkenswert ist, daß sich zur Beschreibung ein und derselben Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum verschiedene Funktionen $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ eignen. Dies wird später im Abschnitt 9.1.3.2 verdeutlicht. Für die Berechnung der vom Winkel θ abhängigen Anstrengung ist aber – wie später gezeigt wird – eine Form der Bruchfunktion praktisch, die bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist.

8.4.3 Übergangsmöglichkeiten zwischen den Spannungsräumen

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß ein Vektor $\{\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}\}$ mit seinen 3 Komponenten keinen kompletten räumlichen Spannungszustand beschreibt, denn hierfür fehlen die dazugehörigen 3 Komponenten $\sigma_1, \sigma_t, \tau_{t1}$, die aber gemäß der Bruchhypothese keinen Einfluß auf das Bruchgeschehen haben. Dies geht aus der Gl. (8.1) auf S. 108 und der anschließenden Diskussion hervor. Selbst wenn der Bruchwinkel θ_{fp} bereits bekannt wäre, könnte man aus den Zahlenwerten für $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ allein nicht auf einen bestimmten zugehörigen Spannungszustand im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum schließen. Ein Weg, der eingeschlagen werden kann, um eine Verbindung zwischen den beiden Spannungsräumen herzustellen, ist folgender:

- Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein (aus der schichtenweisen Spannungsanalyse bekannter) Spannungszustand $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$.
- Dieser wird mit Hilfe von (8.1) in das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem transformiert, wobei für die Bruchanalyse nur die 3 Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ benötigt werden.
- Die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ werden in eine Bruchbedingung $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1$ eingesetzt, und es wird auf eine noch zu beschreibende Weise die Stellung des x_1, x_n, x_t -Koordinatensystems gesucht, für welche die durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ hervorgerufene "Bruchgefahr" am größten ist.

- Mit dem nun bekannten Bruchwinkel θ_{fp} läßt sich der Reservefaktor f_{Res} berechnen, der – weil alle Spannungen nach (8.1) in festen Verhältnissen zueinander stehen – nicht nur für $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$, sondern auch für $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ gilt.
- Mit dem nun bekannten Reservefaktor f_{Res} sind somit auch die zum Bruch führenden Spannungen im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum angebar.

Obwohl man von einem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Bruchzustand nicht unmittelbar auf einen bestimmten zugehörigen Bruchzustand im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum schließen kann, läßt sich zu letzterem doch auf dem beschriebenen umgekehrten Weg, z.B. mit Hilfe des Rechenprogramms *Brukan* [77] eine Verbindung herstellen. Auch lassen sich, wie in [55] beschrieben, mit Hilfe der Topologie allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten erkennen, die zwischen den beiden Bruchkörpern im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum und dem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum bestehen.

8.4.4 Bruchwinkel-Ermittlung

8.4.4.1 Grundsätzliche Überlegungen

Sind die für Zfb maßgebenden "äußeren" Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ noch so niedrig, daß auf keiner Schnittebene unter einem beliebigen Winkel θ ein Zfb eintritt, so bedeutet dies – geometrisch gesehen –, daß keiner der zu den faserparallelen Schnittebenen gehörenden Spannungsvektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ die Master-Bruchfläche erreicht oder gar durchstößt. Würde man den "äußeren" Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ kontinuierlich proportional erhöhen, so würden auch die Spannungsvektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ kontinuierlich gestreckt, und zwar gemäß der Transformationsformel (8.1) mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor wie $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Offensichtlich würde dann diejenige Schnittebene zur realen Bruchebene, deren Spannungsvektor zuerst die Master-Bruchfläche erreichen würde. Das heißt: Diejenige faserparallele Schnittebene ist dafür prädestiniert, zur Bruchebene zu werden, deren Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ am wenigsten gestreckt werden muß, damit die Vektorspitze die Master-Bruchfläche berührt. Für diese Schnittebene ist beim gegebenen Spannungszustand die "Bruchgefahr" am größten. Man findet demnach bei festgehaltenem Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ den Bruchwinkel θ_{fp} auf folgende Weise:

Für jede Schnittebene unter einem beliebigen Winkel θ wird der **positive** Faktor bestimmt, mit dem der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ gestreckt werden müßte, damit er die Master-Bruchfläche erreicht; dieser Faktor wird als **schnittwinkelabhängiger Reservefaktor** $\mathbf{f}_{Res}(\theta)$ oder auch kurz als **Streckungsfaktor** $\mathbf{f}_{Res}(\theta)$, $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, bezeichnet, **Bild 8.10**. Nach den obigen Ausführungen wird diejenige Schnittebene zur Bruchebene, für die der Streckungsfaktor am kleinsten ist.

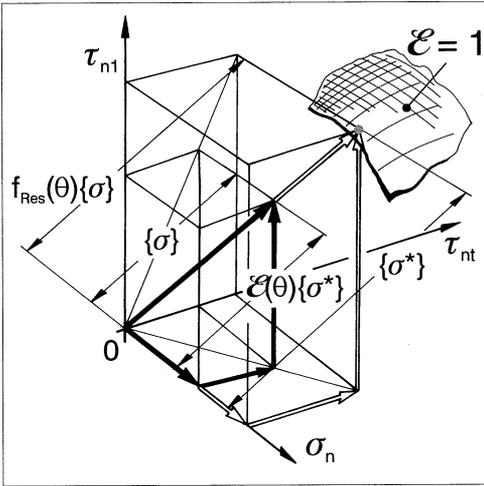


Bild 8.10: Zur Definition des schnittwinkelabhängigen Reservefaktors $f_{Res}(\theta)$ und der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ bei einem Beanspruchungszustand ohne Eigenspannungen

Der kleinste Streckungsfaktor ist derjenige Wert, den man bei den konventionellen Bruchbedingungen als *Reservefaktor* f_{Res} bezeichnet.

Mit anderen Worten:

Der Bruchwinkel θ_{fp} ist globale Minimalstelle des schnittwinkelabhängigen Reservefaktors $f_{Res}(\theta)$, $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$. Das globale Minimum $f_{Res}(\theta_{fp})$ ist der Reservefaktor f_{Res} .

Für Schnittebenen, auf denen keine Spannung herrscht, wird $f_{Res}(\theta) = \infty$; ebenfalls für Schnittebenen mit Spannungen, die keinen Bruch bewirken können, z.B. $\sigma_n < 0$ als allein wirkende Spannung. Für die Ergebnisdarstellung ist deshalb der Kehrwert von $f_{Res}(\theta)$ zweckmäßiger. Dieser stellt die **schnittwinkelabhängige Anstrengung** (Effort) $\mathcal{E}(\theta)$ dar:

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{f_{Res}(\theta)} \quad , \quad -90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ .$$

Zur Ermittlung des Bruchwinkels kann man demnach auch das globale Maximum $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ aufsuchen.

Dies wird in **Bild 8.11** für den Fall einer reinen Schubbeanspruchung durch τ_{23} gezeigt. Die schnittwinkelabhängige Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ ist an der Stelle $\theta = +45^\circ$ höher als an den Stellen $\theta = 0^\circ$ und $\pm 90^\circ$, weil $R_{\perp}^{(+)} < R_{\perp}^A$ ist (s. auch Abschnitt 8.3.3.3).

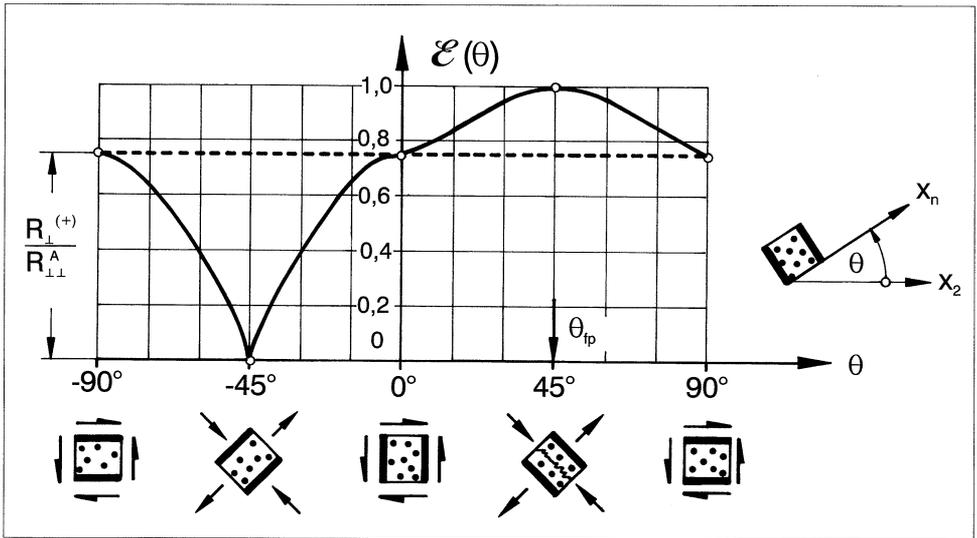


Bild 8.11: Schnittwinkelabhängige Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ bei reiner $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung durch eine Schubspannung τ_{23} . Der Bruch erfolgt bei $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$ unter dem Bruchwinkel $\theta_{fp} = 45^\circ$ infolge der dort herrschenden Haupt-Zugspannung σ_{II} , die dem Betrage nach gleich groß ist wie τ_{23} .

8.4.4.2 Rechnerische Bruchwinkel-Ermittlung, analytische Definition des Streckungsfaktors

Für die Berechnung von θ_{fp} benötigt man eine analytische Definition des Streckungsfaktors $f_{Res}(\theta)$. Gemäß seiner geometrischen Definition kann man schreiben:

$$F(f_{Res}(\theta)\sigma_n(\theta), f_{Res}(\theta)\tau_{nt}(\theta), f_{Res}(\theta)\tau_{n1}(\theta)) = 1 \tag{8.10}$$

In Fällen, in denen sich für $F(\dots)$ ein negativer Zahlenwert ergibt, ist gemäß Definition $f_{Res}(\theta) = \infty$, d.h. es ist $\mathcal{E}(\theta) = 0$ zu setzen. Falls Gl. (8.10) für einen vorgegebenen Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ nicht lösbar ist, wird $f_{Res}(\theta) = \infty$ gesetzt. Geometrisch bedeutet dies, daß der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ auch bei beliebig großer Streckung, die Bruchfläche nie durchstößt, vgl. Bild 8.7 auf S. 119 für $\sigma_n < 0, \tau_{nt} = \tau_{n1} = 0$.

Die Funktion $f_{Res}(\theta)$ ist durch Gl. (8.10) *implizit* definiert. Ob $f_{Res}(\theta)$ auch in *expliziter* Form angegeben werden kann, hängt von der Art der Bruchfunktion F ab.

Homogene Bruchfunktion

Besonders einfach werden die dargestellten Zusammenhänge, wenn die Bruchfunktion F bezüglich der Spannungen homogen ist.

Es sei F homogen vom Grad r , d.h. für eine Vergrößerung aller Spannungen, beispielsweise mit dem schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}(\theta)$, gelte

$$F(f_{Res}(\theta)\sigma_n, f_{Res}(\theta)\tau_{nt}, f_{Res}(\theta)\tau_{n1}) = (f_{Res}(\theta))^r F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}). \quad (8.11)$$

Daraus folgt:

$$f_{Res}(\theta) = \frac{1}{[F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))]^{1/r}} \quad \text{bzw.} \quad E(\theta) = [F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))]^{1/r}. \quad (8.12)$$

Bei homogener Bruchfunktion stimmen die globalen Maximalstellen der schnittwinkelabhängigen Anstrengung bei festgehaltenem Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ mit den globalen Maximalstellen der Bruchfunktion $F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))$ und der transformierten Bruchfunktion $\tilde{F}(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta)$ überein. Folglich liefern auch die globalen Maximalstellen von F bzw. \tilde{F} den Bruchwinkel θ_{fp} . Dies gilt beispielsweise für die Gln. (8.6) und (8.7). Auch konnte in [3, 11] der Bruchwinkel auf einfache Weise durch Aufsuchen der Maximalstellen der in den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum transformierten Bruchfunktion ermittelt werden, denn die dort benutzten Funktionen waren homogen vom Grad 2.

8.5 Mechanische Zusammenhänge

Bei der Aufstellung und Visualisierung der neuen Zfb-Bruchbedingungen im Kapitel 9 werden allerlei Spannungstransformationen, Beziehungen für Haupt-Normalspannungen, resultierende Schubspannungen u. dergl. benötigt. Im Abschnitt 8.5 findet der daran interessierte Leser die entsprechenden Herleitungen.

8.5.1 Spannungen auf "schrägen" Schnitten

Maßgebend für Zwischenfaserbruch sind die Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$, weil diese – anders als die faserparallele Spannung σ_1 – in voller Höhe die Matrix und die Faser/Matrix-Grenzfläche beanspruchen. Tatsächlich treten infolge der Unterschiede zwischen den Moduln von Faser und Matrix (quer zur Faserrichtung) örtlich sogar noch überhöhte Spannungen auf, s. Bild 5.4 auf S. 68. Auch in herkömmlichen Zfb-Kriterien für allgemein räumliche Spannungszustände erscheinen alle fünf Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Jedoch hat man sich bei deren Aufstellung keine Gedanken darüber gemacht, wie und vor allem wo der Bruch erfolgt. Im Gegensatz dazu geht man bei den neuen Bruchbedingungen davon aus, daß der Bruch auf derjenigen Schnittebene entsteht, in der die "gefährlichste" Kombination von $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auftritt. Im allgemeinen ist dies auf einer "schrägen" Schnittebene, d.h. bei $\theta_{fp} \neq (0^\circ, \pm 90^\circ)$ der Fall. Es dürfte deshalb nützlich sein, eine graphische Darstellung der auf Schnitten $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ auftretenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ in Abhängigkeit von den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ zu betrachten. Mit der Transformationsformel (8.1) ergeben sich die

Verläufe der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ über dem Schnittwinkel θ gemäß Bild 8.12.

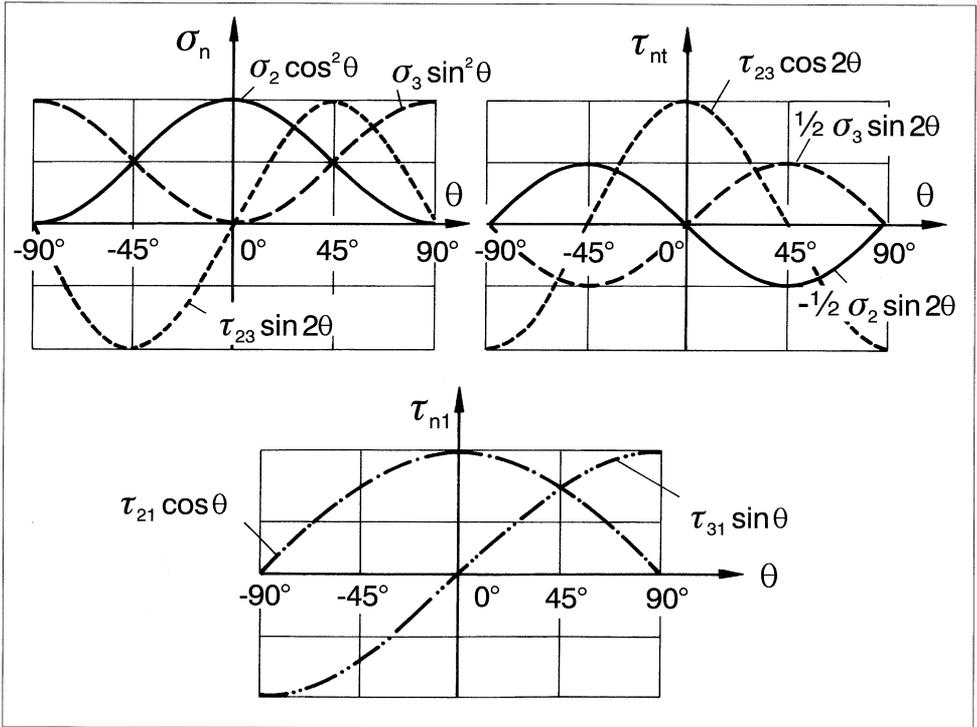


Bild 8.12: Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ in Abhängigkeit vom Schnittwinkel θ für gleichhohe Spannungen $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{21}$

Bemerkenswert ist folgendes:

- Die Spannungen σ_n und τ_{nt} haben nur eine Kraftwirkung in der (x_2, x_3) -Ebene. σ_n und τ_{nt} hängen deshalb auch nur von den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ ab.
- Jede einzelne der drei Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ ruft auf jedem beliebigen schrägen Schnitt eine Normalspannung σ_n hervor. Die Spannungen σ_2 und σ_3 rufen auf jedem schrägen Schnitt auch eine Schubspannung τ_{nt} hervor; die Spannung τ_{23} ebenfalls, außer an den beiden Stellen $\theta = -45^\circ$ und $\theta = +45^\circ$.
- Die Spannung τ_{n1} hängt wegen ihrer Kraftwirkung in x_1 -Richtung lediglich mit den Spannungen τ_{31} und τ_{21} zusammen.

- Jede der beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} ruft auf jedem beliebigen schrägen Schnitt eine Schubspannung τ_{n1} hervor.
- Aus der Periodizität der Spannungsverläufe geht hervor, daß es beim Aufsuchen der Schnittebene mit der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung genügt, einen Schnittwinkelbereich von 180° zu untersuchen.

8.5.2 Auswirkungen des Vorzeichens von Spannungen

Beim Arbeiten mit den neuen Bruchbedingungen werden – wie üblich – Zugspannungen mit positiven und Druckspannungen mit negativen Zahlenwerten angegeben. Das Vorzeichen von σ_n dient auch zur wichtigen Unterscheidung der Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$, für die nach Abschnitt 8.2.2 jeweils eine anders geartete Bruchhypothese gilt und dementsprechend wohl auch eine andere Bruchbedingung nötig sein wird.

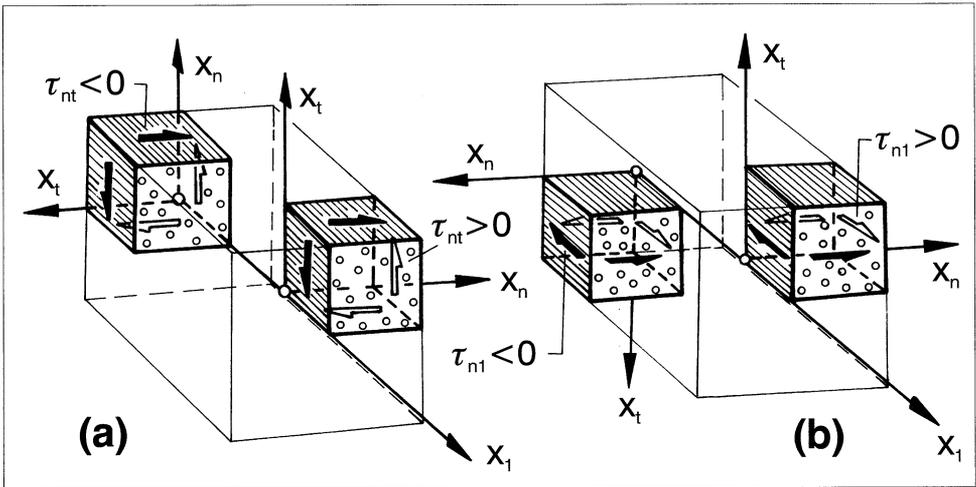


Bild 8.13: Durch Drehung des (x_n, x_t) -Koordinatensystems um 90° bzw. 180° ändert sich bei festgehaltenem Spannungszustand das Vorzeichen der Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , vgl. Bild 8.12.

Anders verhält es sich bei den beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} ; dies geht aus dem **Bild 8.13** hervor. Dieses zeigt, daß man allein durch eine Drehung des (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystems eine positive Schubspannung in eine negative verwandeln kann. Der Beanspruchungszustand und damit die von ihm ausgehende Anstrengung des Werkstoffs kann aber keinesfalls von der willkürlich wählbaren Stellung des Koordinatensystems abhängen.

Deshalb müssen die Schubspannungen in den anzusetzenden Bruchbedingungen in einer solchen Form erscheinen, daß ihr Vorzeichen das Ergebnis nicht beeinflußt. Mit Termen, in denen τ_{nt} und τ_{n1} nur quadratisch auftreten – wie es bereits die Überlegungen des Abschnitts 8.2.1 nahelegten – ist diese Forderung auf einfache Weise zu erfüllen.

8.5.3 Haupt-Normalspannungen und "resultierende" Schubspannungen

Jeder beliebige, aus 3 Normalspannungen und 3 Schubspannungen zusammengesetzte Spannungszustand $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$, läßt sich auch durch drei Haupt-Normalspannungen $\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H}$ (und die Angabe von deren Richtung) beschreiben. Sofern die Festigkeiten – wie bei vielen konventionellen Werkstoffen – nicht richtungsabhängig sind, kann man die Bruchbedingungen am einfachsten mit den drei Haupt-Normalspannungen formulieren. Besonders einfach ist dies natürlich, wenn die Bruchhypothese der maximalen Haupt-Normalspannung zutreffend ist.¹⁰

Bei den orthotropen oder transversal-isotropen Faserverbunden ist ein solches "Umsteigen" in die Koordinatenrichtungen der Haupt-Normalspannungen, die sich aus den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ errechnen, nicht sinnvoll, denn man kennt die Festigkeiten für die im allgemeinen bezüglich der Faserrichtung und der transversal-isotropen Ebene "schrägen" Richtungen x_{1H}, x_{2H}, x_{3H} nicht. Es sind immer nur die für das natürliche, auf die Faserrichtung ausgerichtete, (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem geltenden "Basis-Festigkeiten" bekannt. Deshalb muß man mit einem Koordinatensystem arbeiten, von dem zumindest eine Achse in Richtung der Fasern verläuft, d.h. von dem die x_1 -Achse festliegt.

Bei den UD-Verbunden kann man aber in der Ebene der transversalen Isotropie, der (x_2, x_3) -Ebene, die Achsenrichtungen beliebig wählen und somit auch auf die Koordinatenrichtungen x_{II} und x_{III} übergehen, in denen die beiden aus den drei Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ gebildeten "Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene" σ_{II} und σ_{III} wirken. Das (x_{II}, x_{III}) -Achsenkreuz wird um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinn aus der x_2 -Richtung herausgedreht, **Bild 8.14**. Auf den Schnittebenen, auf denen die "Haupt-Normalspannungen" σ_{II} und σ_{III} auftreten, ist die Schubspannung $\tau_{IIIH} = \tau_{HIII} = 0$. Mit den Transformationsformeln, vgl. (8.1), errechnen sich die Spannungen in x_{II} - und x_{III} -

¹⁰Ohne daß dies besonders hervorgehoben wurde, arbeitete man also bei isotropen Stoffen auch schon in der Vergangenheit gelegentlich mit einem beweglichen Koordinatensystem, denn die Orientierung der Haupt-Normalspannungs-Richtungen gegenüber den (x, y, z) -Koordinaten hängt natürlich vom Spannungszustand $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ ab.

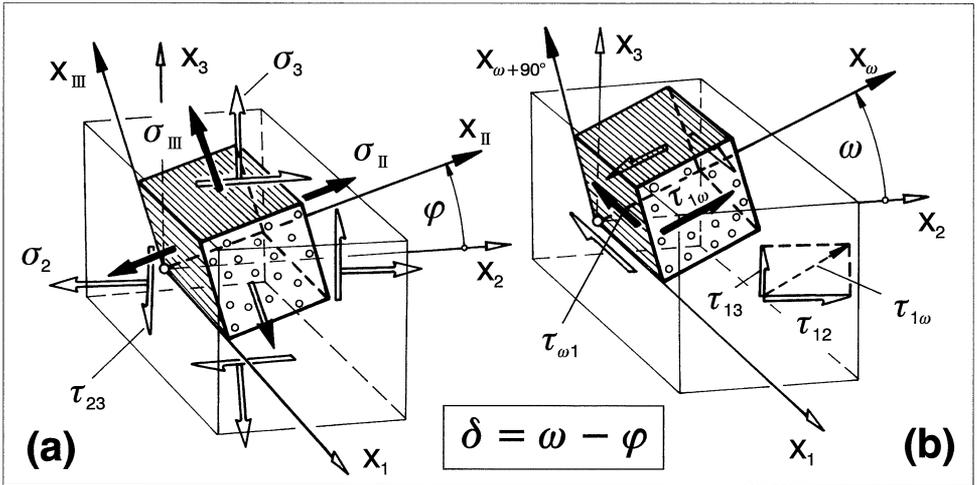


Bild 8.14: (a) Transformation eines $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Spannungszustands in den zugehörigen Haupt-Normalspannungszustand $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0)$. (b) Zusammenfassen der beiden Schubspannungen τ_{12} und τ_{13} zur Schubspannung $\tau_{1\omega}$; deren korrespondierende Schubspannung ist $\tau_{\omega 1}$.

Richtung aus den gegebenen Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ folgendermaßen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}. \quad (8.13)$$

Aus der letzten der drei Gleichungen erhält man mit $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ und $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$ eine Beziehung, aus der sich zunächst der Winkel φ bestimmen läßt, mit dem sich anschließend aus den ersten beiden Gleichungen σ_{II} und σ_{III} berechnen lassen. Es ergibt sich für die Richtung der "Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene":

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3}. \quad (8.14)$$

Mit σ_{II} und σ_{III} nach (8.13) kann in der Zfb-Bedingung die Zahl der auftretenden Spannungen von fünf auf vier reduziert werden, wenn man vom (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem in das (x_1, x_{II}, x_{III}) -Koordinatensystem hinüberwechselt. Statt $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ erscheinen dann in den Bruchbedingungen $\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{III}, \tau_{II}$. Daran, daß zusätzlich zu σ_{II} und σ_{III} auch Schubspannungen τ_{III} und τ_{II} auftreten können, zeigt sich, daß σ_{II} und σ_{III}

nicht die Haupt-Normalspannungen σ_{2H}, σ_{3H} sind, die sich aus dem kompletten Spannungszustand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ errechnen würden, denn auf Schnittebenen, auf denen "echte" Haupt-Normalspannungen wirken, gibt es keine Schubspannungen.

Um möglichen Mißverständnissen vorzubeugen, soll an dieser Stelle ausdrücklich festgestellt werden, daß nicht beabsichtigt ist, die neuen Bruchbedingungen mit Haupt-Normalspannungen anzusetzen. Diese sollen ausschließlich die Visualisierung der neuen Bruchbedingungen erleichtern; man gelangt damit vom fünfdimensionalen Spannungsraum in einen dreidimensionalen.

Mit (8.1), erhält man die Schubspannungen τ_{III1} und τ_{111} folgendermaßen:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{III1} \\ \tau_{111} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}. \tag{8.15}$$

Eine weitere Vereinfachung, die besonders für die Visualisierung der Bruchbedingung in einem dreidimensionalen Spannungsraum von Bedeutung ist, läßt sich dadurch erzielen, daß die beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} (oder τ_{III1} und τ_{111}) durch die aus ihnen resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ ersetzt werden. Diese Möglichkeit wird erkennbar, wenn man statt der auf faserparallelen Schnitten wirkenden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} (oder τ_{III1} und τ_{111}) die korrespondierenden Schubspannungen τ_{13} und τ_{12} (bzw. τ_{1III} und τ_{11I}) auf einem zu den Fasern senkrechten Schnitt betrachtet, Bild 8.14. Weil die beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{12} (bzw. τ_{1III} und τ_{11I}) auf einer gemeinsamen Wirkebene angreifen, kann man sie zu einer "Resultierenden" zusammenfassen:

$$\tau_{1\omega} = \sqrt{\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2} = \sqrt{\tau_{1III}^2 + \tau_{11I}^2} = \tau_{\omega 1}. \tag{8.16}$$

Ihre Richtung wird durch den Winkel ω angegeben; für diesen gilt

$$\omega = \arctan \frac{\tau_{13}}{\tau_{12}} = \arctan \frac{\tau_{31}}{\tau_{21}}. \tag{8.17}$$

Gl. (8.16) sagt folgendes aus: Die auf der zur Faserrichtung senkrechten Ebene wirkende resultierende Schubspannung $\tau_{1\omega}$ läßt sich aus den auf der gleichen Ebene wirkenden Schubspannungen τ_{13} und τ_{12} oder ebenso aus den Schubspannungen τ_{1III} und τ_{11I} berechnen, und sie hat die gleiche Größe wie die für die Zfb-Betrachtung relevante korrespondierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auf der entsprechenden faserparallelen Ebene.

Die soeben durchgeführte Betrachtung der Spannungen auf der zur Faserrichtung senkrechten Ebene diente nur zur Herleitung der Beziehungen; für das praktische Rechnen bei der Zfb-Analyse benutzt man die Zfb-relevanten korrespondierenden Schubspannungen auf faserparallelen Flächen und erhält damit

$$\tau_{\omega 1} = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2} = \sqrt{\tau_{III1}^2 + \tau_{111}^2}. \tag{8.18}$$

Schließlich kann man auch noch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , die auf der zur x_n -Richtung senkrechten faserparallelen Ebene wirken, zu einer "resultierenden" Schubspannung $\tau_{n\psi}$ zusammenfassen. Für deren Größe und Richtung gilt:

$$\tau_{n\psi} = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}, \quad (8.19)$$

$$\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (8.20)$$

Die zugehörige Spannung $\tau_{\psi n}$ hat für die Zfb-Entstehung keine Bedeutung, denn sie wirkt in einer schräg durch die Fasern verlaufenden Ebene, **Bild 8.15**.

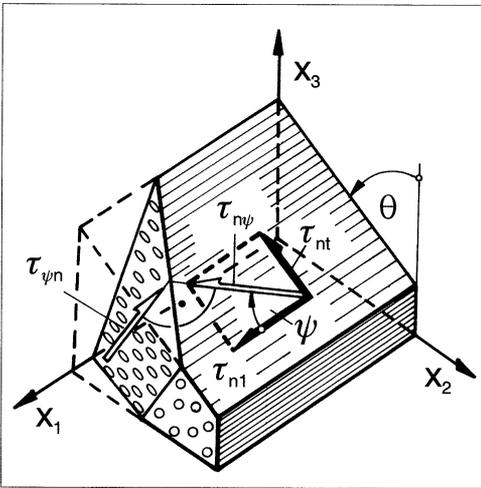


Bild 8.15: Zusammenfassen der beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} zu $\tau_{n\psi}$. Deren korrespondierende Schubspannung ist $\tau_{\psi n}$.

Die auf einer Bruchebene wirkenden Spannungen könnten somit statt durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auch durch σ_n und $\tau_{n\psi}$ sowie ψ angegeben werden. Bei den beiden Komponenten von $\tau_{n\psi}$ stellt aber τ_{nt} eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung und τ_{n1} eine $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung dar. Man muß für möglich halten, daß die "Festigkeitseigenschaften" bei $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung andere sind als bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, weil das mikromechanische Geschehen in den beiden Fällen recht unterschiedlich ist. Nur aus diesem Grunde werden die beiden Komponenten von τ_{nt} und τ_{n1} in den Bruchbedingungen gesondert aufgeführt. Man kann aber nicht prinzipiell ausschließen, daß u.U. bei einem UD-Verbundstoff die "Festigkeitseigenschaften" bei $\tau_{\perp\perp}$ - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung praktisch gleich sind. In diesem Fall erscheint die Annahme berechtigt, daß die "Festigkeit" von der Richtung ψ der resultierenden Schubspannung $\tau_{n\psi}$ unabhängig ist. Deshalb wird man die Bruchbedingungen wohl so formulieren, daß sie für $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ auf Schnitten $\sigma_n = \text{const.}$ in Kreisgleichungen übergehen, d.h. der Bruchkörper zu einem Rotationskörper wird, s. Bild 9.10 auf S. 149.

9 Bruchbedingungen der neuen Art

9.1 Bruchbedingung für eine druckbeanspruchte Bruchebene

9.1.1 Vorbemerkungen

Ein mathematischer Ansatz, der als physikalisch begründete Bruchbedingung für Zfb dienen soll, muß selbstverständlich der zugrundeliegenden Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 entsprechen und den Anforderungen nach Abschnitt 8.2.1 genügen, ansonsten verbleiben aber für die Formulierung der Bruchfunktion viele Freiheiten. Auch kann man – wie schon erwähnt – verschiedene Funktionen zur Beschreibung ein und derselben Bruchfläche benutzen [55]. Aus der zugrundegelegten Bruchhypothese allein folgt nur, daß bei gleichzeitiger Wirkung von $\sigma_n > 0$ und τ_{nt} sowie τ_{n1} alle drei Spannungen einen positiven Beitrag zur "Bruchgefahr" $\mathcal{E}(\theta)$ liefern, während sich die Bruchgefahr verringert, wenn zu τ_{nt} und τ_{n1} eine Normalspannung $\sigma_n < 0$ hinzutritt. Wie die Funktion angesetzt wird, muß aufgrund experimenteller Erfahrungen und mathematischer Zweckmäßigkeit entschieden werden.

Bei der mathematischen Formulierung einer Bruchbedingung für $\sigma_n < 0$ gemäß der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 sind zwei Aufgaben zu lösen:

1. Es muß ein realistischer und mathematisch gut handhabbarer Ansatz für den zusätzlichen, durch eine Spannung $\sigma_n < 0$ hervorgerufenen, Widerstand gegen Schubbruch infolge τ_{nt} oder τ_{n1} gemacht werden, (Abschnitt 9.1.2).
2. Es muß ein zweckmäßiger "Interaktionsansatz" für das Zusammenwirken von τ_{nt} und τ_{n1} bei der Brucherzeugung gefunden werden, (Abschnitt 9.1.3).

Zu 1. werden der lineare Ansatz und ein realistischerer parabolischer Ansatz gemacht. Bei 2. gelingt der Durchbruch zu mathematisch einfach handhabbaren Lösungen erst durch Ansätze für Längsschnitte statt für Querschnitte des Master-Bruchkörpers.

9.1.2 Einfluß der Druckspannung auf den Schubbruch

9.1.2.1 Lineare Bruchkurven

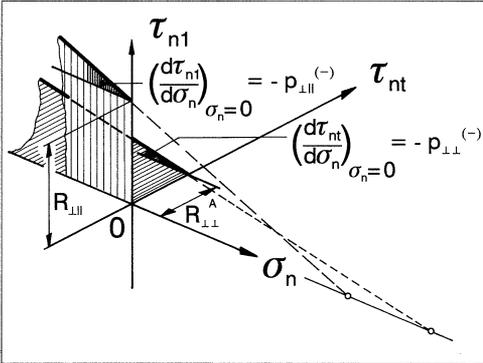


Bild 9.1: (σ_n, τ_{n1}) -Bruchkurve und (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve für $\sigma_n < 0$ bei linearem Druckspannungseinfluß

Als einfachster Ansatz bietet sich in Anlehnung an die Festigkeitshypothese von *Coulomb* [72] eine lineare Zunahme des zusätzlichen Schubbruchwiderstands mit steigender Druckspannung an, **Bild 9.1**. Für eine Spannungscombination, die nur aus τ_{n1} und $\sigma_n < 0$ besteht, lautet damit die Bruchbedingung

$$\tau_{n1} = R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.1)$$

τ_{n1} und σ_n sind hierin die beim Bruch auftretenden Spannungen!

$p_{\perp\parallel}^{(-)}$ ist der Proportionalitätsfaktor bei σ_n , der nach *Coulomb* als "Reibungsbeiwert" gedeutet werden kann.

Sofern bei einer (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, kann $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ als Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für den Bereich $\sigma_2 \leq 0$ an der Stelle $\sigma_2 = 0$ erhalten werden, s. Bild 5.1 auf S. 61.

Die zweite Form von Gl. (9.1.) findet sich in der Gl. (9.14) wieder, die dritte Form von Gl. (9.1) in Gl. (9.20).

Im Hinblick auf eine spätere Kombination von τ_{nt} und τ_{n1} erscheint es zweckmäßig, die ertragbare Schubspannung τ_{nt} ebenso anzusetzen, Bild 9.1:

$$\tau_{nt} = R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} + \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.2)$$

Die zweite Form von Gl. (9.2.) findet sich in Gl. (9.14) wieder, die dritte Form von Gl. (9.2) in Gl. (9.20).

Spannungen τ_{nt} und σ_n treten auf einer faserparallelen Ebene bei Beanspruchungen durch "äußere" Normalspannungen σ_2 und σ_3 auf. Für die Betrachtungen in diesem Abschnitt sollen σ_2 und σ_3 gleichzeitig die Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene sein (d.h. es ist $\tau_{23} = 0$); sie werden deshalb mit σ_{II} und σ_{III} bezeichnet.

Auf den Beziehungen (8.13) und (8.14) in Abschnitt 8.5.3 für die Haupt-Normalspannungen basiert die Darstellung des Mohrschen Spannungskreises und der Mohrschen "Hüll-Linie" [80], die im Bereich $\sigma_n < 0$ mit der (τ_{nt}, σ_n) -Bruchkurve, z.B. nach (9.2), identisch ist. (Der Mohrsche Spannungskreis wird im Teil III anhand des Bildes 10.1 auf S. 174 erläutert.)

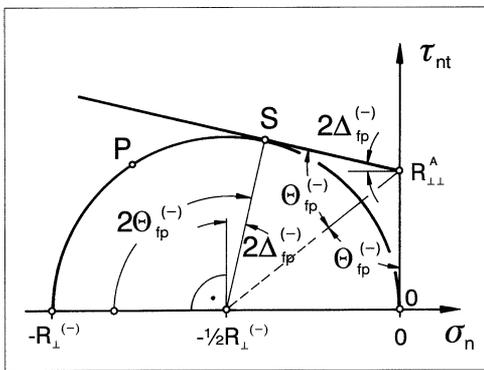


Bild 9.2: Mohrscher Spannungskreis für einachsige Quer-Druckbeanspruchung zur Herleitung von Beziehungen zwischen dem Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ und den Parametern $R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bei linearem Druckspannungseinfluß

Dem **Bild 9.2** liegt der Beanspruchungsfall der einachsigen Quer-Druckbeanspruchung mit $\sigma_{II} = -R_{\perp}^{(-)}$, $\sigma_{III} = 0$ zugrunde. Die "Hüll"-Linie nach Gl. (9.2) stellt die Grenze der ertragbaren Schubspannung τ_{nt} auf irgendeiner schrägen Schnittebene dar. Der Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises liegt auf der σ -Achse; der Kreis schneidet die σ -Achse bei σ_{II} und σ_{III} . Die Koordinaten eines Punktes P des Kreises, der nicht auf der σ -Achse liegt, stellen einen Spannungszustand auf einem "schrägen" Schnitt dar, die Normalspannung σ_n (auf der Abszisse) und die Schubspannung τ_{nt} (auf der Ordinate), die auf einer um den Winkel Θ gegenüber der Richtung von σ_{II} geneigten Schnittebene auftreten. (Zur Kennzeichnung der Lage einer Schnittebene wird, wenn von den Ebenen der Haupt-Normalspannungen ausgegangen wird, Θ statt θ benutzt, um zu zeigen, daß der Winkel von der Richtung von σ_{II} aus gemessen wird und nicht von der Richtung von σ_2 aus.)

Weil die Bruchlinie (oder "Hüll-Linie") diejenigen (σ_n, τ_{nt}) -Kombinationen angibt, die beim Bruch auftreten, kann kein Spannungskreis diese Linie überschreiten, sondern sie allenfalls (beim Bruchzustand) gerade berühren. Die Koordinaten des Berührungspunktes S (für Schubbruch, Shear fracture) stellen $\tau_{nt}(\Theta_{fp})$ und $\sigma_n(\Theta_{fp})$ beim Bruch dar. Auch der Bruchwinkel Θ_{fp} kann der graphischen Darstellung nach *Mohr* entnommen werden.

Es erweist sich hierbei als zweckmäßig, den Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung folgendermaßen anzugeben:

$$\Theta_{fp}^{(-)} = 45^\circ + \Delta_{fp}^{(-)}. \quad (9.3)$$

Aus Gl. (9.2) ergibt sich die Steigung der Bruchkurve, die hier eine Gerade ist, als

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = -p_{\perp\perp}^{(-)}. \quad (9.4)$$

Die Bruchgerade ist auch Tangente des Mohrschen Spannungskreises im Berührungspunkt S; es gilt deshalb:

$$-\tan 2\Delta_{fp}^{(-)} = \cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = -p_{\perp\perp}^{(-)}. \quad (9.5)$$

Aus den geometrischen Gegebenheiten in Bild 9.2 ist weiterhin ersichtlich, wie der benötigte Parameter $R_{\perp\perp}^A$ mit der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ und dem zugehörigen Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ zusammenhängt¹

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cotan \Theta_{fp}^{(-)} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \left(\sqrt{1 + p_{\perp\perp}^{(-)2}} - p_{\perp\perp}^{(-)} \right). \quad (9.6)$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man selbstverständlich auch – aber umständlicher – indem man analytisch das globale Maximum von $\mathcal{E}(\Theta)$ bestimmt und dann $\Theta_{fp}^{(-)}$ in die Bruchbedingung (9.2) einsetzt.

9.1.2.2 Parabolische Bruchkurven

Mohr hat als Bruchkurve $\tau(\sigma)$, die er Hüllkurve nennt, eine gekrümmte Linie empfohlen, bei der die ertragbare Schubspannung τ degressiv mit – absolut betrachtet – wachsender Druckspannung ansteigt, und die sich bei sehr hohen Druckspannungen allmählich einer Parallelen zur σ -Achse nähert. Die einfachste gekrümmte Linie, die diese Forderungen erfüllt (Steigung = "null" allerdings erst für $\sigma \rightarrow -\infty$), ist eine Parabel [80].

Für eine Kombination von τ_{n1} und $\sigma_n < 0$, **Bild 9.3**, lautet die Bruchbedingung in diesem Fall

$$\tau_{n1}^2 = R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}^2}{R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n} = 1 \quad (9.7)$$

$$\text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0.$$

¹Die zweite Fassung ergibt sich mit Gl. (9.5) und dem Additionstheorem $\cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = \frac{\cotan^2 \Theta_{fp}^{(-)} - 1}{2\cotan \Theta_{fp}^{(-)}}$.

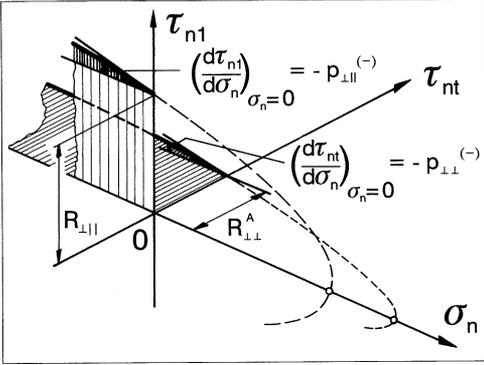


Bild 9.3: (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve und (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve für $\sigma_n < 0$ bei parabolischem Druckspannungseinfluß

Die zweite Form von (9.7) findet sich in (9.15) wieder, die dritte Form in (9.23). Entsprechend wird für die Kombination von τ_{nt} und $\sigma_n < 0$, Bild 9.3, angesetzt:

$$\tau_{nt}^2 = (R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)}R_{\perp\perp}^A\sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)}R_{\perp\perp}^A\sigma_n} = 1 \quad (9.8)$$

$$\text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + 2\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A}\sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0.$$

Die zweite Form von (9.8) findet sich in (9.15) wieder, die dritte Form in (9.23). Bei der parabelförmigen Hüllkurve nach (9.8) ist an der Stelle $\sigma_n = 0$ die Schubspannung beim Bruch $\tau_{nt} = R_{\perp\perp}^A$ und die Steigung $d\tau_{nt}/d\sigma_n = -p_{\perp\perp}^{(-)}$.

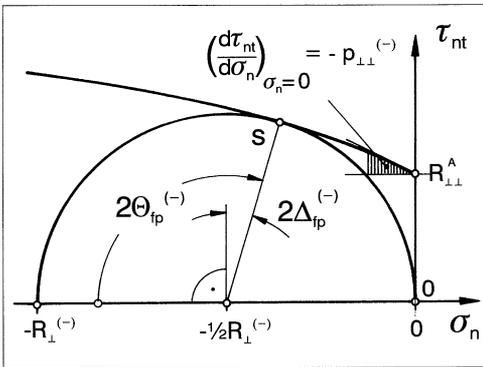


Bild 9.4: Mohrscher Spannungskreis für einachsige Quer-Druckbeanspruchung zur Herleitung von Beziehungen zwischen dem Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ und den Parametern $R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bei parabolischem Druckspannungseinfluß

Bild 9.4 zeigt, wie die Zusammenhänge zwischen Steigungsmaß $p_{\perp\perp}^{(-)}$, Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bei einachsigem Druck, Druckfestigkeit $R_{\perp\perp}^{(-)}$ und Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ der Wirkebene sich wieder am einfachsten mit Hilfe des Mohrschen Kreises und der parabelförmigen Hüllkurve

ermitteln lassen. Der Berührungspunkt S von Kreis und Parabel hat die Koordinaten

$$\sigma_n = -\frac{R_{\perp}^{(-)}}{2}(1 - \sin 2\Delta_{fp}^{(-)}), \quad (9.9)$$

$$\tau_{nt} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cos 2\Delta_{fp}^{(-)}. \quad (9.10)$$

Diese können in die Parabelgleichung (9.8) eingesetzt werden. Eine weitere Gleichung für die beiden Unbekannten $\Delta_{fp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ liefert die Übereinstimmung der Steigungen von Kreis und Parabel im Punkt S:

$$-\tan 2\Delta_{fp}^{(-)} = \cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = -\frac{p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\perp}^A}{\tau_{nt}} = -p_{\perp\perp}^{(-)} \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\perp}^A - 2p_{\perp\perp}^{(-)}\sigma_n}}. \quad (9.11)$$

Man findet aus den beiden Gleichungen:

$$\sin 2\Delta_{fp}^{(-)} = -\cos 2\Theta_{fp}^{(-)} = \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{1 + p_{\perp\perp}^{(-)}}, \quad (9.12)$$

$$R_{\perp\perp}^A = -\frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2p_{\perp\perp}^{(-)}} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})}. \quad (9.13)$$

Weil die parabelförmige Bruchkurve den Vorstellungen von *Mohr* über die Form der Hüllkurve recht nahe kommt, wird sie später bevorzugt behandelt.

9.1.3 Interaktionsansätze für die Schubspannungen

Nun gilt es, den zweiten Teil der Aufgabe zu bewältigen, nämlich für eine kombinierte (τ_{nt}, τ_{n1}) -Beanspruchung einen einfachen Interaktionsansatz zu finden, der die Bruchbedingungen für die Einzelbeanspruchungen τ_{nt} und τ_{n1} (jeweils in Kombination mit $\sigma_n < 0$) miteinander verknüpft. Bei linearem Einfluß der Druckspannung σ_n sind dies die Bruchbedingungen nach den Gln. (9.1) und (9.2), bei parabelförmigem Verlauf der (τ_{nt}, σ_n) - und (τ_{n1}, σ_n) -Bruchkurve die Bruchbedingungen nach den Gln. (9.7) und (9.8).

9.1.3.1 Master-Bruchkörper mit elliptischen Querschnitten

Der "klassische" Interaktionsansatz ist der "quadratisch additive", der für die Querschnitte $\sigma_n = \text{const.}$ auf elliptische (τ_{nt}, τ_{n1}) -Bruchkurven führt. Obwohl abzusehen ist, daß solche Ansätze mathematisch ungeschickt sind, soll mit diesen begonnen werden, weil sie die "Physik" gut sichtbar machen.

Auf (9.1) und (9.2) angewandt ergibt sich damit als Bruchbedingung für eine kombinierte $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Beanspruchung [81]:

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \tag{9.14}$$

Auf (9.7) und (9.8) angewandt lautet die Bruchbedingung

$$\frac{\tau_{nt}^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\perp}^A \sigma_n} + \frac{\tau_{n1}^2}{R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \tag{9.15}$$

Die beiden Halbachsen der durch (9.14) oder (9.15) beschriebenen elliptischen (τ_{nt}, τ_{n1}) -Bruchkurven an Stellen $\sigma_n = const.$ wachsen bei verschiedenen Werten für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ (sowie $R_{\perp\perp}^A$ und $R_{\perp\parallel}$) unterschiedlich stark mit $|\sigma_n|$ an, **Bilder 9.5 und 9.6**.

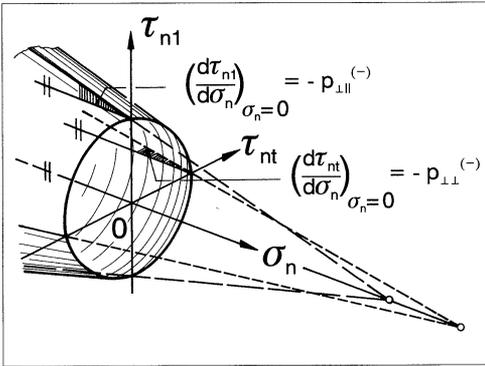


Bild 9.5: Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ mit elliptischen Querschnitten und geradlinigen Konturlinien in den beiden Längsschnitten $\tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = 0$

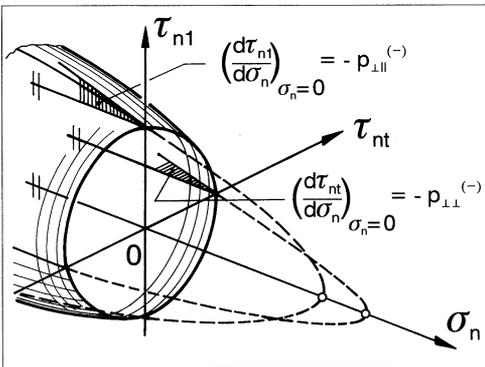


Bild 9.6: Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ mit elliptischen Querschnitten und parabolischen Konturlinien in den beiden Längsschnitten $\tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = 0$

Für $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ werden die Querschnitte kreisförmig.

Für das Aufsuchen des Bruchwinkels mit Hilfe von $f_{Res}(\theta)$ oder $\mathcal{E}(\theta)$ sind die Ansätze (9.14) und (9.15) schlecht geeignet, denn für den schnitwinkelabhängigen Reservefaktor

$f_{Res}(\theta)$ erhält man aus (9.14) eine Gleichung 4. Grades, aus (9.15) eine 3. Grades. Deren Lösungen müßten nach dem globalen Minimum für $f_{Res}(\theta)$ abgesucht werden. Es hat sich somit als nicht sonderlich zweckmäßig erwiesen, für **Querschnitte** $\sigma_n = const.$ ein einfaches Polynom zu wählen. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, der für die Anwendbarkeit der neuen Bruchbedingungen in großen FEM-Modellen sicherlich eine Rolle spielt, soll deshalb im folgenden nach geschickteren Ansätzen gesucht werden.

9.1.3.2 Master-Bruchkörper mit geraden oder parabelförmigen Längsschnitten

Vorteilhaft dürfte es sein, nicht für Querschnitte $\sigma_n = const.$, sondern für Längsschnitte $\psi = \arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt}) = const.$ ein einfaches Polynom zur Beschreibung der Schnittkurve zu wählen, denn die Streckung des Spannungsvektors mit dem schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}(\theta)$ erfolgt in einem solchen Längsschnitt $\psi = const.$ Auf diese Weise sollte es daher am ehesten gelingen, eine einfache Beziehung für $f_{Res}(\theta)$ zu erhalten.

Weil man für die Bruchkurven in den Schnitten $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$ Geraden (Gln. (9.1) und (9.2)) oder Parabeln (Gln. (9.7) und (9.8)) benutzt hat, erscheint es sinnvoll, analog auch für Schnitte unter einem beliebigen Winkel ψ Geraden bzw. Parabeln zu wählen.

Ausgangsquerschnitt bei $\sigma_n = 0$

An der Stelle $\sigma_n = 0$ wird der elliptische Querschnitt des Master-Bruchkörpers nach (9.14) oder (9.15) beibehalten. (Die Querschnitte nach (9.14) und (9.15) unterscheiden sich dadurch, daß der lineare und der parabolische Druckspannungseinfluß zu etwas unterschiedlichen Werten für $R_{\perp\perp}^A$ führen.) Mit τ_{nt_0} und τ_{n1_0} , die gemeinsam eine Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta) = 1$ erzeugen, wenn $\sigma_n = 0$ ist, lautet die Gleichung des "Ausgangsquerschnitts":

$$\left(\frac{\tau_{nt_0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1_0}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n = 0. \quad (9.16)$$

Für die aus τ_{nt_0} und τ_{n1_0} resultierende Schubspannung wird die Bezeichnung $\tau_{n\psi_0}$ eingeführt und für den zugehörigen Bruchwiderstand der Wirkebene das Symbol $R_{\perp\psi}^A$. Durch die Gln. (8.19) und (9.16) sind dann folgende Zusammenhänge gegeben, **Bild 9.7**:

$$\left(\frac{\tau_{n\psi_0}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \frac{\tau_{nt_0}^2 + \tau_{n1_0}^2}{(R_{\perp\psi}^A)^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{nt_0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1_0}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \left[\left(\frac{\tau_{nt_0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1_0}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \right] (\tau_{nt_0}^2 + \tau_{n1_0}^2)^{-1} \quad \text{für } \sigma_n = 0. \quad (9.17)$$

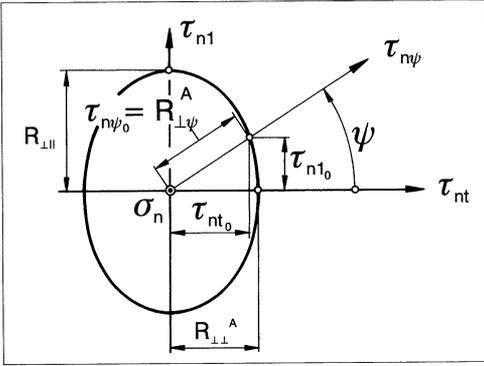


Bild 9.7: Elliptischer Ausgangsquerschnitt bei $\sigma_n = 0$ für alle Master-Bruchkörper

Mit $\tau_{nt0} = \tau_{n\psi_0} \cos \psi$ und $\tau_{n1_0} = \tau_{n\psi_0} \sin \psi$ an der Stelle $\sigma_n = 0$ und $\tau_{nt} = \tau_{n\psi} \cos \psi$ und $\tau_{n1} = \tau_{n\psi} \sin \psi$ an einer Stelle $\sigma_n \neq 0$ läßt sich $(1/R_{n\psi}^A)^2$ auch folgendermaßen angeben (s. auch (8.19)):

$$\left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \left(\frac{\cos \psi}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sin \psi}{R_{\parallel\parallel}}\right)^2 = \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\parallel\parallel}}\right)^2\right] \tau_{n\psi}^{-2} \tag{9.18}$$

$$\left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\parallel\parallel}}\right)^2\right] (\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2)^{-1}.$$

Von dieser Ellipse an der Stelle $\sigma_n = 0$ gehen nun in negativer σ_n -Richtung gerade bzw. parabelförmige Konturlinien aus, so daß eine Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ entsteht.

Master-Bruchkörper mit geradlinig begrenzten Längsschnitten $\psi = \text{const.}$

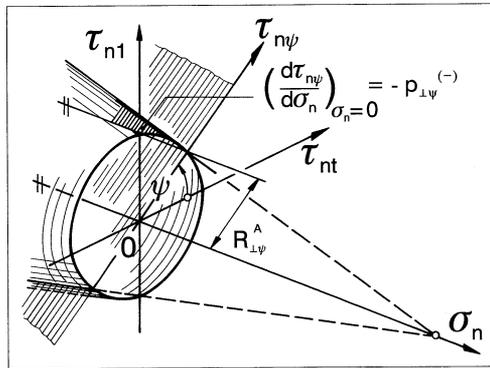


Bild 9.8: Gerade Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$

Die Gleichung einer geraden Konturlinie in einem Schnitt $\psi = \text{const.}$, **Bild 9.8**, lautet

$$\tau_{n\psi} = R_{\perp\psi}^A - p_{\perp\psi}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0. \tag{9.19}$$

Mit Hilfe von (9.18) wird hieraus eine sehr einfache Bruchbedingung, nämlich

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\psi}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (9.20)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nach (9.24) auf S. 147.

Da die Bruchfunktion in Gl. (9.20) bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist, stellt sie die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ dar. Man kann diese Funktion somit auch zum Aufsuchen des Bruchwinkels θ_{fp} benutzen, indem man das globale Minimum der Funktion $\mathcal{E}(\theta)$ bestimmt.

Master-Bruchkörper mit parabelförmig begrenzten Längsschnitten $\psi = \text{const.}$

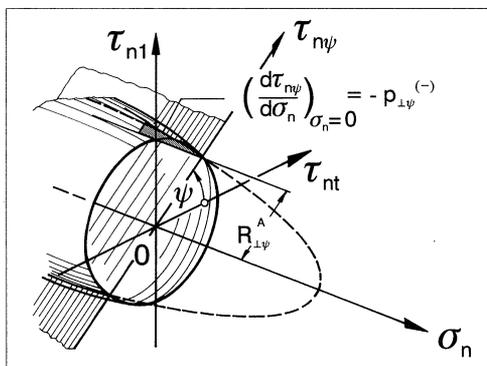


Bild 9.9: Parabolische Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$

Die Gleichung einer parabolischen Konturlinie im Schnitt $\psi = \text{const.}$, **Bild 9.9**, lautet

$$\tau_{n\psi}^2 = (R_{\perp\psi}^A)^2 - 2p_{\perp\psi}^{(-)} R_{\perp\psi}^A \sigma_n \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + 2\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.21)$$

Sie ist nicht homogen bezüglich der Spannungen und kann deshalb in dieser Form nicht zur Bruchwinkelermittlung herangezogen werden.

Wenn $\tau_{n\psi}$ und σ_n mit dem Reservefaktor f_{Res} vergrößert werden, damit die Bruchbedingung erfüllt wird, ergibt sich für f_{Res} die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 f_{Res}^2 + 2\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} f_{Res} \sigma_n = 1.$$

Zur Lösung der Gleichung kann man sich der Gln. (4.8) oder (4.9) auf S. 48 bedienen. Gl. (4.9) ist "angenehmer", weil bei ihr keine Spannungen im Nenner erscheinen. Man erhält:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.22)$$

Mit der Gl. (9.18) ergibt sich aus (9.22) die Bruchbedingung, die zugleich die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ darstellt:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (9.23)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nach (9.24).

An diesem Beispiel ist einmal deutlich geworden, daß verschiedene Bruchfunktionen zur Beschreibung ein und derselben Bruchfläche dienen können. Im vorliegenden Fall waren es die in der zweiten Form der Gl.(9.21) und die in (9.23) enthaltenen Funktionen.

Wahl des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ in Abhängigkeit vom Winkel ψ , Interpolationsformel

Die Werte des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ für die Längsschnitte $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$, d.h. von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ sollten – soweit möglich – aufgrund experimenteller Erfahrung gewählt werden. Zwischen $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$ muß dann so interpoliert werden, daß die durch die Bruchbedingungen (9.20) oder (9.23) beschriebenen Bruchflächen keine Sprünge aufweisen; sie sollen "glatte Flächen" sein. Das heißt, daß auch die Bruchkurven in Querschnitten $\sigma_n = const.$ an keiner Stelle einen Knick aufweisen sollten. Dies schränkt die in Betracht kommenden Interpolationsansätze stark ein. Da in den Bruchbedingungen immer nur das Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ erscheint, bietet sich als eine zweckmäßige Lösung an, für dieses Verhältnis folgenden einfachen Interpolationsansatz zu wählen:

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \text{mit } \psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (9.24)$$

Da der Verlauf von $R_{\perp\psi}^A$ über dem Winkel ψ bereits durch (9.18) vorgegeben ist, führt (9.24) zu der folgenden Abhängigkeit des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ vom Winkel ψ :

$$p_{\perp\psi}^{(-)} = \left(\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \right) \left[\left(\frac{\cos \psi}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\sin \psi}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.25)$$

Diese Beziehung wird für das praktische Rechnen nicht benötigt; es genügt (9.24).

Die Frage, ob eine Variation von $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ über dem Winkel ψ überhaupt nötig ist, oder ob es genügt, z.B. mit einem von ψ unabhängigen Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ zu rechnen, kann mangels experimenteller Erfahrung noch nicht beantwortet werden. Vermutlich ist für die meisten Fälle der Praxis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = const. = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ eine sehr gute Näherung.

9.1.3.3 Sonderfall $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = const.$

Wenn $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ ist, und sich das Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ auch mit dem Winkel ψ nicht ändert, ist es belanglos, ob man bei der Entwicklung der Bruchbedingung von der

Vorgabe elliptischer Querschnitte durch die Gln. (9.14) bzw. (9.15) oder von der Vorgabe gerader oder parabelförmiger Längsschnitte durch die Gln. (9.20) bzw. (9.23) ausgeht, denn man gelangt stets zum gleichen Ergebnis. Dies hat seinen Grund darin, daß sich mit $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel} = (p_{\perp\psi}/R_{\perp\psi}^A)_{const}$ die Gln. (9.14) und (9.15) folgendermaßen vereinfachen:

$$\left[1 - \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)_{const} \sigma_n \right]^{-2} \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.26)$$

$$\left[1 - 2 \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)_{const} \sigma_n \right]^{-1} \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.27)$$

Gl. (9.26) ist identisch mit Gl. (9.20), und Gl. (9.27) stimmt mit Gl. (9.23) überein.

In diesem Fall ist der durch die Gl. (9.20) bzw. (9.23) mit $(p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A)_{const}$ beschriebene Master-Bruchkörper ein Kegel mit elliptischen Querschnitten bzw. ein Paraboloid mit elliptischen Querschnitten an allen Stellen $\sigma_n = const.$.

Für den Fall, daß $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ sich mit dem Winkel ψ ändert, gilt folgendes:

Die Master-Bruchkörper mit elliptischen Querschnitten nach den Gln. (9.14) und (9.15) haben jetzt nur bei $\psi = 0^\circ$ und bei $\psi = 90^\circ$, d.h. in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene und in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene gerade bzw. parabelförmige Konturlinien im Längsschnitt. Bei jedem beliebigen Winkel ψ zwischen 0° und 90° ist die Längsschnitt-Konturlinie nicht gerade bzw. parabelförmig.

Die Master-Bruchkörper mit geraden bzw. parabolischen Längsschnitten nach Gl. (9.20) bzw. (9.24) haben, wenn $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nicht über dem Winkel ψ konstant ist, nur an der Stelle $\sigma_n = 0$ einen elliptischen Querschnitt; in allen übrigen Schnitten $\sigma_n = const.$ ist der Querschnitt des Master-Bruchkörpers keine Ellipse.

Ist $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$, ergibt sich als Master-Bruchkörper in jedem Fall ein Kreiskegel bzw. ein Rotationsparaboloid mit der σ_n - Achse als Rotationsachse, **Bild 9.10**.

9.2 Bruchbedingung für eine zugbeanspruchte Bruchebene

Ebenso wie schon bei $\sigma_n < 0$ erscheint es zweckmäßig, ein einfaches Polynom für die Bruchkurven in Längsschnitten $\psi = const.$ zu wählen, damit sich daraus eine gleichfalls einfache Beziehung für die Streckung des Spannungsvektors in der Längsschnittebene $\psi = const.$ ergibt. In diesem Fall kommen als Bruchkurven, die sowohl der 1. als auch der 3. Aussage der Bruchhypothese entsprechen und gut an experimentell ermittelte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven

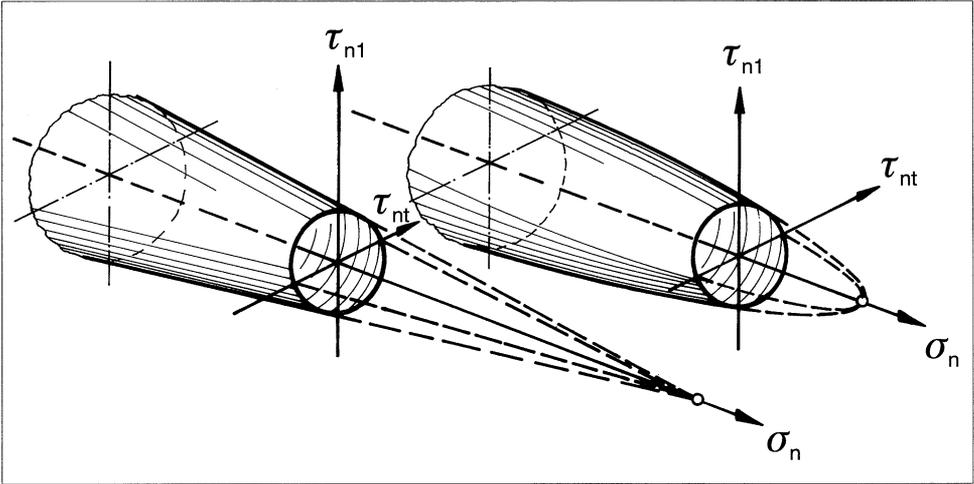


Bild 9.10: Im Sonderfall $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ wird der Master-Bruchkörper zu einem Kreiskegel bzw. Rotationsparaboloid.

anpaßbar sind, Ellipsen in Betracht, die bei $\sigma_n = R_{\perp}^{(+)}$ die σ_n -Achse schneiden, und deren Mittelpunkte auf der σ_n -Achse im Bereich $\sigma_n < 0$ liegen, **Bild 9.11**.

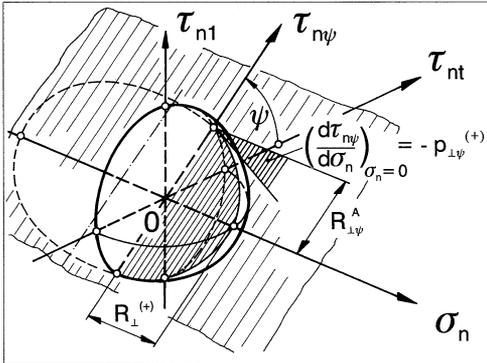


Bild 9.11: Elliptische Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n \geq 0$

Als Querschnitt des Bruchkörpers bei $\sigma_n = 0$ wird der elliptische Querschnitt nach (9.14) bzw. (9.15) beibehalten, je nachdem, mit welcher Bruchbedingung man im Bereich $\sigma_n < 0$ arbeitet. Damit lautet die Gleichung der elliptischen Schnittkurve für $\psi = \text{const.}$

$$c_2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2 + c_1 \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}} + \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0 \tag{9.28}$$

mit $(\tau_{n\psi}/R_{\perp\psi}^A)$ nach (9.18) auf S. 145.

Zum Berechnen der Anstrengung nutzen wir Gl. (4.9) auf S. 48 und erhalten:

$$\sqrt{\left(c_2 + \frac{c_1^2}{4}\right) \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}}\right) = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.29)$$

Für $\tau_{n\psi} = 0$ muß sich $\sigma_n = R_{\perp}^{(+)}$ ergeben. Daraus folgt nach Gl. (9.28)

$$c_2 + c_1 = 1. \quad (9.30)$$

Für die weitere Anpassung empfiehlt es sich wiederum, für die Steigung $d\tau_{n\psi}/d\sigma_n$ der Bruchkurve an der Stelle $\sigma_n = 0$ einen Parameter $-p_{\perp\psi}^{(+)}$ einzuführen, wobei $p_{\perp\psi}^{(+)}$ von $\psi = 0^\circ$ bis $\psi = \pm 90^\circ$ zwischen $p_{\perp\perp}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ variieren kann.

Aus (9.28) oder (9.29) folgt für $\sigma_n = 0$ und $\tau_{n\psi} = R_{\perp\psi}^A$:

$$\frac{d\tau_{n\psi}}{d\sigma_n} = -p_{\perp\psi}^{(+)} = -\frac{c_1}{2} \frac{R_{\perp\psi}^A}{R_{\perp}^{(+)}}. \quad (9.31)$$

Mit (9.30) und (9.31) sowie (9.18) auf S. 145 erhält man schließlich als Bruchbedingung

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.32)$$

Für $p_{\perp\psi}^{(+)}/R_{\perp\psi}^A$ empfiehlt sich eine gleichartige Interpolation wie (9.24), nämlich

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(+)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \text{mit } \psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (9.33)$$

Achtung: Vor einer Annahme $p_{\perp\psi}^{(+)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.} = p_{\perp\parallel}^{(+)}/R_{\perp\parallel}$ muß gewarnt werden, denn sie kann zu einem Verstoß gegen den 3. Satz der Bruchhypothese führen, wenn bei zu großen $p_{\perp\perp}^{(+)}$ -Werten die Bruchellipse den Grenzkreis (nach Bild 10.5 auf S. 179) berührt oder schneidet. Wenn $p_{\perp\perp}^{(-)} \leq 0,2$ ist, empfiehlt sich, $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$ zu setzen.

9.3 Anwendung als Delaminations-Bedingungen

Publikationen zu Delaminations-Bruchbedingungen stimmen darin überein, daß Delaminationen durch die sogenannten interlaminaren Spannungen verursacht werden, die in der Grenzfläche zwischen benachbarten Einzelschichten eines Laminats auftreten. Für die Beurteilung der Delaminationsgefahr (der "interlaminaren Anstrengung") wird von den meisten Autoren – abweichend von deren Vorgehen bei der Beurteilung der Bruchgefahr in der Schicht (der "intralaminaren Anstrengung") – eine wirkebenebezogene Bruchbedingung angesetzt,

d.h. eine solche Bruchbedingung, in der nur die drei in der interlaminaren Grenzfläche wirkenden Spannungen erscheinen. Dabei wird wie in [43] meist ein parabolischer Ansatz

$$\frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{R_{\tau_z}^2} + \frac{\sigma_z}{R_{\sigma_z}} = 1 \quad \text{für } \sigma_z > 0 \quad (9.34)$$

gewählt. R_{τ_z} und R_{σ_z} sind hierin die "interlaminare Schubfestigkeit" bzw. "interlaminare Zugfestigkeit", deren experimentelle Bestimmung allerdings problematisch ist [38]. Die interlaminaren Spannungen $(\sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{zx})$ sind auf das globale (x, y, z) -Koordinatensystem des Laminats bezogen, d.h., daß die Bruchbedingung (9.34) keine Rücksicht auf die Faserrichtungen in den beiden aneinandergrenzenden Schichten nimmt. Die Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} können zu einer "resultierenden" Schubspannung $\tau_{z\Psi}$ zusammengefaßt werden; es gilt

$$\tau_{z\Psi} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (9.35)$$

Bei der Aufstellung der Delaminations-Bruchbedingung (9.34) und ähnlicher Ansätze ist, obwohl dies nirgends explizit zum Ausdruck kommt, offensichtlich die Mohrsche Festigkeitshypothese [54] zugrundegelegt worden, die besagt, daß die Bruchgrenze durch die Spannungen der Bruchebene bestimmt wird. In diesem Buch wird die Mohrsche Festigkeitshypothese selbstverständlich konsequent sowohl auf intralaminare als auch auf interlaminare Brüche angewandt, so daß die Delamination von dort her gesehen überhaupt keiner außergewöhnlichen Behandlung bedarf. Beim allgemeinen räumlichen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{23})$ -Spannungszustand kann der Bruchwinkel beim Zfb nur durch ein numerisches Suchverfahren gefunden werden. Für jede denkbare Lage der Bruchebene zwischen $\theta = -90^\circ$ und $\theta = +90^\circ$ müssen die drei Spannungen $\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)$ berechnet werden, und es muß durch Einsetzen dieser Spannungen in die Bruchbedingung herausgefunden werden, auf welcher Schnittebene die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ am höchsten ist. Wenn dies bei einem Winkel $\theta_{fp} \neq \pm 90^\circ$ der Fall ist, tritt intralaminarer Bruch ein. Ergibt sich jedoch die höchste schnittwinkelabhängige Anstrengung bei $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$, heißt das, daß interlaminarer Bruch eintritt, also Delamination. (Für $\theta = -90^\circ$ und $+90^\circ$ errechnet sich stets die gleiche Anstrengung, denn die beiden Spannungszustände unterscheiden sich allenfalls durch das Vorzeichen bei einer Schubspannung, und dies kann die Anstrengung nicht beeinflussen.)

Aus dem Vorausgegangenen geht hervor, daß es bei der konsequenten Anwendung der Mohrschen Hypothese keiner gesonderten Delaminations-Bedingung bedarf, denn die Delamination wird als Grenzfall des Zwischenfaserbruches aufgefaßt. Allerdings gibt es gute Gründe dafür, in diesem Grenzfall mit etwas herabgesetzten Bruchwiderständen in der Werkzeugebene zu rechnen. Dort, wo zwei UD-Schichten aneinandergrenzen, entstehen bei der Fertigung – durch die Faserkreuzung bedingt – eher Fehlstellen in Form kleiner Lufteinschlüsse

und Fadenwelligkeit als innerhalb der Schichten. Auch werden, mikromechanisch gesehen, an Fadenkreuzungen Spannungskonzentrationen auftreten. Deshalb dürfte es angebracht sein, in dem Grenzfall $\theta = \pm 90^\circ$ die in der Bruchbedingung erscheinenden Bruchwiderstände der Wirkebene durch einen Schwächungsfaktor (weakening factor) der Schichtengrenzfläche (Interface, If) $f_w^{(If)}$ auf etwa 90 bis 80% der intralaminaren Werte herabzusetzen. Ansonsten gehen die Delaminations-Bedingungen aus den Zfb-Bedingungen für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand hervor.

Für $\sigma_n \geq 0$ wird (9.32) benutzt und für $\sigma_n < 0$ der parabolische Ansatz nach (9.23).

Mit $\theta = 90^\circ$ wird $\sigma_n = \sigma_3, \tau_{nt} = \tau_{32}, \tau_{n1} = \tau_{31}$ und man erhält:

$$\frac{1}{f_w^{(If)}} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_{32}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} R_{\perp}^{(+)}\right)^2 \left(\frac{\sigma_3}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_3 \right] = 1 \text{ für } \sigma_3 \geq 0, \quad (9.36)$$

$$\frac{1}{f_w^{(If)}} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_{32}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2} \sigma_3^2 + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_3 \right] = 1 \text{ für } \sigma_3 < 0, \quad (9.37)$$

mit $\frac{p_{\perp\psi}^{(\pm)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(\pm)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(\pm)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi$ und $\psi = \arctan \frac{\tau_{31}}{\tau_{32}}$. (9.38)

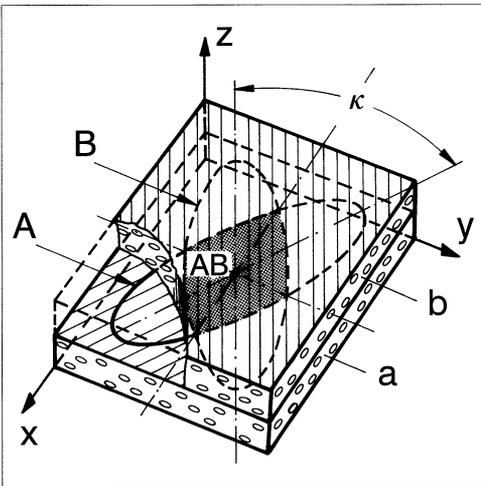


Bild 9.12: Elliptische (τ_{32}, τ_{31}) -Bruchkurven A und B der Grenzschichten zweier benachbarter UD-Schichten a und b. Für die Delaminationsfestigkeit gegenüber einer interlaminaren Schubspannung $\tau_{z\psi}$ ist der Überlappungsbereich AB der beiden Bruchellipsen maßgebend. (κ ist der Kreuzungswinkel der Faserrichtungen der beiden Schichten).

Bruchkurven für $\sigma_3 = \text{const.}$ stellen bei $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.}$ Ellipsen dar, **Bild 9.12**. Wenn sich die Fasern zweier benachbarter UD-Schichten unter dem Winkel κ kreuzen, bilden auch

die Hauptachsen der Bruchellipsen der beiden Grenzschichten einen Winkel κ . Bei der Betrachtung der Delaminationsgefahr müssen die beiden Bruchellipsen überlagert werden, denn der Bruch kann entweder in der "Grenzschicht" der einen oder der anderen UD-Schicht erfolgen, je nachdem welche Schicht der auftretenden Schubspannung $\tau_{z\Psi}$ den kleineren Bruchwiderstand entgegengesetzt. Wenn keine Richtungsabhängigkeit des Schub-Bruchwiderstands zu erwarten wäre, hätte es in den Bruchbedingungen (9.36) und (9.37) gar nicht zweier Schubspannungsterme, τ_{32} und τ_{31} , bedurft, sondern man hätte von folgender Beziehung Gebrauch machen können:

$$\tau_{z\Psi} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\tau_{32a}^2 + \tau_{31a}^2} = \sqrt{\tau_{32b}^2 + \tau_{31b}^2}. \quad (9.39)$$

Die Indizes a und b dienen zur Kennzeichnung der beiden benachbarten Schichten, deren Koordinaten-Richtungen x_{1a}, x_{1b} nicht zusammenfallen, sondern sich um den Faserkreuzungswinkel κ unterscheiden.

Als Ergebnis der Betrachtung ist festzuhalten, daß die Delaminations-Bedingungen, was die "physikalische Fundierung" anbelangt, das gleiche Niveau wie die 3D-Zfb-Bedingungen haben, und daß bei der numerischen Zfb-Untersuchung automatisch die Delaminations-Anstrengung mitberechnet wird. Dazu muß man aber die Spannungen in zusammengehörigen Punkten der "Grenzschichten" zweier benachbarter UD-Schichten analysieren.

Die "Festigkeits"-Bruchbedingungen (9.36) und (9.37) sollten nicht auf stark inhomogene Spannungszustände mit hohen örtlichen Spannungsspitzen, wie sie an freien Rändern auftreten [82], angewandt werden. Sie würden möglicherweise "Bruch" vorhersagen, obwohl für die Entwicklung des Bruches die nötige Energiefreisetzung fehlt. In solchen Fällen rechnet man gelegentlich mit bruchrelevanten Durchschnittsspannungen (average stress failure criteria), die dann in Bruchbedingungen wie (9.36), (9.37) eingesetzt werden. Dies erfordert aber viel Erfahrung.

Für die Beurteilung der Delaminationsgefahr, die von relativ gleichmäßig über die Schichten-Grenzfläche verteilten interlaminaeren Spannungen ausgeht, wie sie in großflächigen Krafteinleitungen, in ungestörten aber stark gekrümmten Laminatpartien oder unter Querkraftbelastung auftreten, sind die Gln. (9.36) und (9.37) gut geeignet. Die Erfahrung lehrt aber, daß sich – auch bei dickwandigen Bauteilen – äußerst selten Delaminationen errechnen, bevor sich Zwischenfaserbrüche eingestellt haben.

9.4 Sekundäre Einflüsse

9.4.1 Einfluß der faserparallelen Spannung

Im Abschnitt 5.1.3 ist dargelegt worden, warum beim Auftreten hoher σ_1 -Spannungen mit einer Herabsetzung ("Degradation") der Bruchwiderstände der Wirkebene zu rechnen ist. Man

stellt sich eine homogene, bezüglich der Faserrichtung rotations-symmetrische Mikroschädigung durch die faserparallele Spannung vor. Dieser kann dadurch Rechnung getragen werden, daß alle Bruchwiderstände der Wirkebene in einer Bruchbedingung mit dem gleichen Schwächungsfaktor (weakening factor) $0 < f_w(\sigma_1) < 1$ erniedrigt werden. Seine Abhängigkeit von σ_1 muß experimentell ermittelt und dann durch eine einfache Funktion approximiert werden. Diese sollte so angesetzt werden, daß sie erst bei einer Annäherung an den Faserbruch merklich wirksam wird. Eine einfache Funktion, die hierfür in Frage kommt, ist beispielsweise

$$f_w(\sigma_1) = 1 - \left(\left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1d}} \right| \right)^n \quad \text{bzw. linearisiert} \quad f_w(\sigma_1) = 1 - \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right| \quad (9.40)$$

mit einem hohen Exponenten n , wobei sowohl der für die Degradation maßgebende Spannungswert σ_{1d} als auch der Exponent n experimentell bestimmt werden müßten. In [83] wurde $|\sigma_{1d}| = 1,1R_{\parallel}$ und $n = 6$ bis 8 angenommen. σ_{1D} wird iterativ verändert.

Eine Alternative hierzu ist bereits im Abschnitt 5.1.3 vorgestellt worden. Dort wurde bis $|\sigma_1| = 0,7R_{\parallel}$ überhaupt keine Degradation vorgesehen und anschließend eine durch einen elliptischen Kurvenast beschriebene, Bild 5.5 auf S. 70.

In beiden Fällen ist $f_w(\sigma_1)$ eine recht einfache Funktion. Wenn man sie aber in die Bruchfunktion der Gln. (9.20), (9.23), (9.32) einführt, bleiben diese bezüglich der Spannungen $(\sigma_1, \sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ nicht mehr homogen. Die Homogenität vom Grad 1 muß aber aufrechterhalten werden, wenn die Bruchfunktionen weiterhin zur direkten Berechnung der Zfb-Anstrengung benutzt werden sollen.² Dann darf σ_1 nur in der 1. Potenz erscheinen, und der in Wirklichkeit nicht-lineare Zusammenhang zwischen f_w und σ_1 muß linearisiert und durch Iteration berücksichtigt werden. **Bild 9.13** zeigt hierzu zwei Möglichkeiten auf.

- (a): f_w wird nur in dem gerade errechneten Funktionswert angepaßt,
- (b): f_w wird im Funktionswert und in der Steigung f'_w angepaßt.

Die Variante (b) erfordert weniger Iterationen. Es müssen aber für den jeweils bei der Rechnung erreichten Wert σ_1 und den zugehörigen Wert f_w (nach der richtigen Funktion) die Hilfsgrößen f_{w0} und $|f'_w|$ berechnet werden, s. z.B. Gln. (5.17) und (5.18) auf S. 70 und 71. Es wird so lange iteriert, bis f_{w0} und $|f'_w|$ sich nicht mehr nennenswert ändern.

Mit dem Schwächungsfaktor f_w nehmen die Bruchbedingungen folgende Form an:

$$\frac{1}{f_w} F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1} \dots) = 1. \quad (9.41)$$

²Bei der Ermittlung des Bruchwinkels θ_{fp} durch Aufsuchen des globalen Maximums der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ stört der Term mit σ_1 nicht, denn er fällt bei der Bildung von $d\mathcal{E}(\theta)/d\theta$ heraus, weil σ_1 nicht von θ abhängt. Anschließend wird aber die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ zur Bestimmung der Ribbildungsgrenze benötigt.

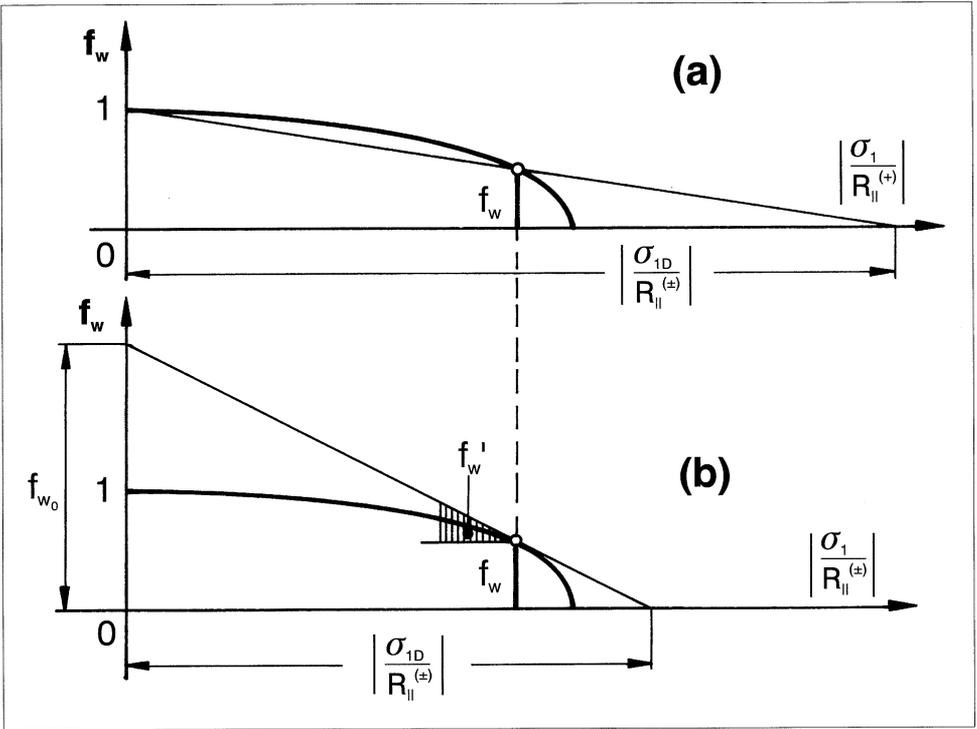


Bild 9.13: Linearisierung des Einflusses der faserparallelen Spannung σ_1 auf den Zwischenfaserbruch. (a) Anpassung nur im Funktionswert f_w (b) Anpassung im Funktionswert f_w und in der Steigung f'_w

Nach Bild 9.13b ist

$$f_w = f_{w0} - \frac{f_{w0}}{\sigma_{1D}} \sigma_1 = f_{w0} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right). \quad (9.42)$$

Damit wird aus den Bruchbedingungen (9.20) bzw. (9.23) bzw. (9.32):

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n} \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.43)$$

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n} \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.44)$$

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n} \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.45)$$

Achtung: Anders als eine Festigkeit ist σ_{1D} eine vorzeichenbehaftete Größe; bei $\sigma_1 > 0$ ist σ_{1D} positiv, bei $\sigma_1 < 0$ negativ!

Die Gln. (9.41) bis (9.45) zeigen, daß die Master-Bruchflächen, die den Einfluß von σ_1 berücksichtigen, durch geometrisch ähnliche Verkleinerung mit dem Faktor f_w aus den Master-Bruchflächen, in denen σ_1 nicht enthalten ist, hervorgehen.

Wenn der Einfluß von σ_1 in der beschriebenen Weise erfaßt werden kann, beeinflusst die faserparallele Spannung σ_1 das Ergebnis der Bruchwinkelermittlung nicht, weil σ_1 für alle Schnittebenen mit Winkeln $-90^\circ \geq \theta \geq +90^\circ$ gleich groß ist, vgl. Transformationsformel (8.1). Man kann also den Bruchwinkel θ_{fp} in gewohnter Weise suchen, ohne auf σ_1 Rücksicht zu nehmen, d.h., daß man für die Bruchwinkelsuche $\sigma_1 = 0$ setzen kann.

9.4.2 Einfluß von Eigenspannungen

Im Abschnitt 5.4 wurde am Beispiel der (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung aufgezeigt, wie man bei der Anwendung von Bruchbedingungen grundsätzlich verfährt, wenn Eigenspannungen berücksichtigt werden sollen. Bei den Bruchbedingungen im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum geht man genauso vor. Nur wenn man nicht unter der Voraussetzung $(p_{\perp\psi}/R_{\perp\psi}^A) = const.$ rechnen kann, ergibt sich eine Besonderheit. Dies soll hier kurz skizziert werden.

Der Zfb-relevante Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ setzt sich aus einem nach Größe und Richtung konstanten Eigenspannungsvektor (residual stress, r) und einem mit der Höhe der Belastung anwachsenden Lastspannungsvektor (load dependent stress, l) zusammen.

Aus der Transformationsformel (8.1) ergibt sich somit (9.46)

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_2^{(l)} \\ \sigma_3^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_3^{(l)} \\ \tau_{23}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{23}^{(l)} \\ \tau_{31}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{31}^{(l)} \\ \tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{21}^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)} \\ \tau_{nt}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(l)} \\ \tau_{n1}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Obwohl der Eigenspannungs-Vektor $\{\sigma_n^{(r)}, \tau_{nt}^{(r)}, \tau_{n1}^{(r)}\}$ und der von der Belastungshöhe abhängige Vektor $\{f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(r)}, f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(r)}, f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(r)}\}$ im Normalfall verschiedene Richtungen haben³, wird der zum Bruch führende zusammengesetzte Vektor $\{\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}\}$ genau so behandelt, als wenn er – wie bisher stets vorausgesetzt – aus dem Koordinatenursprung geradlinig herausgewachsen wäre, bis er die Master-Bruchfläche berührt. D.h., man rechnet

³Anders verhält es sich beim *Puck/Schürmann*-Verfahren, bei dem gezielt dem Zfb entgegenwirkende Eigenspannungen eingebracht werden, und zwar solche, wie sie im Betriebszustand auftreten, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen. Bei Betriebsbelastung durchläuft die resultierende Spannung den Nullpunkt [41].

unabhängig vom Lastweg immer mit derselben Master-Bruchfläche, weil man den Einfluß des Lastwegs auf die Bruchkurve nicht kennt.

Der wesentliche Unterschied gegenüber einem Spannungszustand ohne Eigenspannungen, besteht darin, daß die Verhältnisse der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ untereinander nicht konstant sind, sondern von der Höhe der lastbedingten Spannungen, also von $f_{Res}^{(l)}(\theta)$ abhängen, d.h., daß die Richtung des Vektors sich mit $f_{Res}^{(l)}(\theta)$ ändert. Deshalb kann in einem ersten Rechenschritt für $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ nur ein vorläufiger Wert angesetzt werden, weil der durch den Winkel $\psi = \arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt})$ bestimmte Längsschnitt unter dem Winkel ψ , in dem der Vektor auftritt, der schließlich mit seiner Spitze die Master-Bruchfläche berührt, nicht von vornherein bekannt ist. Anschließend muß dann iteriert werden.

Auch die Fall-Unterscheidung, $\sigma_n \geq 0$ oder $\sigma_n < 0$, ist etwas schwieriger geworden, weil nunmehr der Wert von $\sigma_n = \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)}$ über die zu wählende Bruchbedingung entscheidet, der von $f_{Res}^{(l)}$ abhängt.

Aus den Gln. (9.23) für das Bruch-Paraboloid bzw. (9.32) für das Bruch-Ellipsoid erhält man unter den getroffenen Voraussetzungen quadratische Gleichungen für den schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}(\theta)$:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\tau_{nt}^{(l)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] (f_{Res}^{(l)}(\theta))^2 + 2 \left[\frac{\tau_{nt}^{(r)} \tau_{nt}^{(l)}}{(R_{\perp\perp}^A)^2} + \frac{\tau_{n1}^{(r)} \tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(l)} \right] f_{Res}^{(l)}(\theta) + \\ & + \left(\frac{\tau_{nt}^{(r)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(r)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(r)} = 1 \quad \text{für } \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)} < 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = const.$ bzw. nach Gl. (9.24),

$$\begin{aligned} & \left[c_2 \left(\frac{\sigma_n^{(l)}}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^{(l)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] (f_{Res}^{(l)}(\theta))^2 + \\ & + 2 \left[c_2 \frac{\sigma_n^{(r)} \sigma_n^{(l)}}{(R_{\perp}^{(+)})^2} + \frac{\tau_{nt}^{(r)} \tau_{nt}^{(l)}}{(R_{\perp\perp}^A)^2} + \frac{\tau_{n1}^{(r)} \tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(l)} \right] f_{Res}^{(l)}(\theta) + \\ & + c_2 \left(\frac{\sigma_n^{(r)}}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^{(r)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(r)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(r)} = 1 \quad \text{für } \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)} \geq 0 \end{aligned} \quad (9.48)$$

mit $c_2 = 1 - 2R_{\perp}^{(+)} p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ und $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ nach Gl. (9.33).

Wenn angenommen werden darf, daß die Werte der Größen $p_{\perp\perp}^{(-)} / R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} / R_{\perp\parallel}$ nicht sehr verschieden sind, wird man bei der Benutzung der obigen Gl. (9.47) zum Aufsuchen des minimalen schnittwinkelabhängigen Reservefaktors $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ mit einem konstanten mittleren Wert $p_{\perp\psi}^{(-)} / R_{\perp\psi}^A$ oder auch einfach mit $p_{\perp\parallel}^{(-)} / R_{\perp\parallel}$ rechnen.

Unterscheiden sich die Werte $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ erheblich und werden höhere Anforderungen an die Genauigkeit gestellt, so muß iteriert werden. Verschiedene Iterationsprozeduren sind vorstellbar; grundsätzlich sollte man aber den Aufwand nicht zu weit treiben, denn die Verlässlichkeit der Rechenergebnisse ist bereits dadurch beeinträchtigt, daß der Lastweg in Wirklichkeit nicht mehr geradlinig vom Nullpunkt zum Bruchpunkt verläuft.

Zweckmäßig erscheint das folgende Vorgehen. Der Winkel ψ , unter dem der Längsschnitt beim gerade durchgeführten Rechenschritt liegt, folgt aus

$$\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(l)}}{\tau_{nt}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(l)}}. \quad (9.49)$$

Beim ersten Rechenschritt wird zur Bestimmung des Winkels ψ zunächst $f_{Res}^{(l)}(\theta) = 1$ gesetzt, d.h. es wird mit den aus der Spannungsanalyse vorliegenden Eigenspannungen und Lastspannungen gerechnet. Aus der erstmaligen Lösung der quadratischen Gln. (9.47) und (9.48) erhält man damit einen ersten Anhaltspunkt für den tatsächlichen Wert von $f_{Res}^{(l)}(\theta)$. Dann wird im nächsten Rechenschritt mit dem Wert für $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ gerechnet, der sich soeben mit den Lösungen der quadratischen Gleichung (9.47) bzw. (9.48) ergeben hat, u.s.w.. Da der Einfluß von $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ auf das Ergebnis für $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ nicht sehr stark ist, dürften 1 bis 3 Iterationen genügen.

Ungewöhnlich ist neben der andersartigen Fallunterscheidung und der iterativen Annäherung an die richtigen Werte für $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$, daß das Vorzeichen der lastbedingten Schubspannungen $\tau_{nt}^{(l)}$ und $\tau_{n1}^{(l)}$ Einfluß auf die Bruchgefahr erhält, sobald Schubspannungen $\tau_{nt}^{(r)}, \tau_{n1}^{(r)}$ auftreten (s. die gemischten Glieder $\tau^{(r)}\tau^{(l)}$). Deshalb muß sorgfältig auf die Vorzeichen der Eigen- und Last-Schubspannungen geachtet werden!

Wenn aus einer der obigen Gleichungen der Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ für die lastbedingten Spannungen berechnet worden ist, macht es keinen Sinn, dessen Kehrwert als "Anstrengung" zu berechnen, vgl. Diskussion im Abschnitt 5.4.

Eigentlich müßte man – zusätzlich zur hier beschriebenen Kurzzeit-Bruchanalyse – auch noch eine Langzeit-Bruchanalyse für den Eigenspannungszustand durchführen.

Bei einer allgemeinen schwingenden Beanspruchung tritt die hier aufgezeigte Eigenspannungs-Problematik nicht auf, denn in diesem Fall werden die Eigenspannungen den ohnehin zu berücksichtigenden ruhenden Last-Mittelspannungen zugeschlagen [25].

9.5 Anwendungsempfehlungen

9.5.1 Allgemeine Hinweise und Empfehlungen

Grundsätzlich empfiehlt es sich – wie auch aus den folgenden Ausführungen deutlich wird – sich vor der Anwendung von Bruchbedingungen gründlich mit ihrem theoretischen Hinter-

grund vertraut zu machen, damit man ihre Aussagekraft, aber vor allem auch die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit richtig einzuschätzen vermag.

Mit den aufgestellten Bruchbedingungen steht nun ein äußerst anpassungsfähiges Modell mit bis zu sieben Parametern, nämlich $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp\perp}^A$, $R_{\perp\parallel}$, $p_{\perp\perp}^{(+)}$, $p_{\perp\parallel}^{(+)}$, $p_{\perp\perp}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(-)}$, zur Verfügung. Ob man in der Praxis tatsächlich alle vier p-Parameter benötigt, müssen die geplanten Experimente und Beispielrechnungen [83] zeigen. Vermutlich wird man bei den Werten $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ normalerweise von der Kopplung $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ Gebrauch machen und außerdem meistens $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ setzen. Damit enthält das Modell nur noch fünf Parameter.

Für den Fall $\sigma_n < 0$ kommen die "klassischen" Ansätze (9.14) und (9.15) mit elliptischen Querschnitten weniger in Betracht, weil sie einen unnötigen Rechenaufwand verursachen. Man wird ihnen wohl stets die geschickteren Ansätze für Längsschnitte $\psi = const.$, nämlich (9.20) und vor allem (9.23), vorziehen. Diese reduzieren den Rechenaufwand erheblich und sind aus physikalischer Sicht genau so akzeptabel wie die "klassischen" Ansätze nach (9.14) und (9.15). Voraussichtlich wird man bei den allermeisten Rechnungen aber $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ annehmen dürfen, womit die obige Unterscheidung ohnehin gegenstandslos wird, und sich wesentliche Vereinfachungen ergeben. Grundsätzlich erscheint der parabolische Ansatz (9.23) realistischer als der lineare Ansatz (9.20). Er hat gegenüber (9.20) u.a. noch den Vorteil, daß keine negativen Werte für $\mathcal{E}(\theta)$ und $f_{Res}(\theta)$ auftreten können. Werte $f_{Res}(\theta) < 0$ würden eine Umkehr des Richtungssinnes aller Spannungen fordern. Eine solche ist aber für σ_n nicht zulässig, weil die in Betracht kommenden Bruchbedingungen jeweils nur für $\sigma_n < 0$ oder $\sigma_n \geq 0$ gelten. Somit spricht einiges für eine bevorzugte Anwendung des parabolischen Ansatzes nach Gl. (9.23).

In der **Tabelle 9.1** sind die wichtigsten Beziehungen für die Anwendungspraxis zusammengestellt. Dabei wurde davon ausgegangen, daß aus dem einachsigen Quer-Druckversuch nicht nur die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, sondern auch der auftretende Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bekannt ist. In diesem Fall kann man den Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ und den Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ aus $R_{\perp}^{(-)}$ und $\Theta_{fp}^{(-)}$ berechnen. Wenn der Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ nicht bekannt ist, muß man $R_{\perp\perp}^A$ aus $R_{\perp}^{(-)}$ und einen angenommenen Wert für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ errechnen, z.B. aus $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$.

In dieser Arbeit ist außer bei der Behandlung von Eigenspannungen vorausgesetzt worden, daß die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ und damit auch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ unabhängig von ihren Absolutwerten in einem unveränderlichen Verhältnis zueinander stehen. Das bedeutet u.a. auch, daß bei Versuchen zur Ermittlung werkstoffabhängiger Parameter ebenso wie bei Bruchversuchen zur Überprüfung der Brauchbarkeit einer Bruchbedingung diese Voraussetzung gleichfalls erfüllt werden muß. Damit ist der "Lastpfad" strikt vorgeschrieben. Diese Grundvoraussetzung muß unbedingt beachtet werden, denn es ist durchaus eine Abhängigkeit der Ergebnisse von Bruchversuchen vom Lastpfad zu erwarten [66].

Tabelle 9.1: Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen für die Anwendungspraxis

Bruchbedingung	für $\sigma_n \geq 0$	$\mathcal{E} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^{(+)}}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1$		parabolischer Druckspannungs-Einfluß
	für $\sigma_n < 0$	$\mathcal{E} = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1$		
Neigungsmaß $p_{\perp\perp}^{(-)}$		$p_{\perp\perp}^{(-)} = -\cotan 2\Theta_{fp}^{(-)}$		
		$p_{\perp\perp}^{(-)} = -\frac{\cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{1 + \cos 2\theta_{fp}^{(-)}}$		
Bruchwiderstand der Wirkebene $R_{\perp\perp}^A$		$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cotan \Theta_{fp}^{(-)} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \left(\sqrt{1 + p_{\perp\perp}^{(-)2}} - p_{\perp\perp}^{(-)}\right)$		$R_{\perp\perp}^A = -\frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2p_{\perp\perp}^{(-)}} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})}$
	Empfohlene Interpolation	$\frac{p_{\perp\psi}^{(\pm)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(\pm)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\parallel\perp}^{(\pm)}}{R_{\parallel\perp}} \sin^2 \psi$		mit $\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}$

Die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehenden, den Bruchzustand charakterisierenden Funktionen $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ können als schmittwinkelabhängige Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ zur Ermittlung des Bruchwinkels θ_{fp} benutzt werden. Möglichkeiten zur Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 finden sich im Abschnitt 9.4.1.

In der Praxis der Bruchanalyse von Laminaten wird man diese in der Theorie vorausgesetzte Idealbedingung selten vorfinden. Sie ist bereits verletzt, wenn Stoffgesetze nicht-linear sind, oder wenn Eigenspannungen auftreten. Dies ist ein generelles Problem bei der Anwendung von Bruchbedingungen beliebiger Art und kein spezielles Problem der hier vorgestellten Bruchbedingungen.

Grundsätzlich sollten die neuen Bruchbedingungen nicht nur für zügig von "null" bis zum Bruch gesteigerte Belastungen anwendbar sein, aber sicher wird man bei der experimentellen Überprüfung der Bruchbedingungen mit dieser Beanspruchungsart beginnen [15,84]. Hinweise zu speziellen Problemen und Lösungsmöglichkeiten bei schwingender Beanspruchung können der Arbeit [25] und den Ausführungen im Abschnitt 11.1 entnommen werden.

Bei der Beurteilung von Ergebnissen, die mit Bruchbedingungen erhalten werden, sollte stets folgendes bedacht werden: Eine Bruchbedingung in der hier vorgestellten Form kann einen Bruch der UD-Schicht anzeigen, jedoch nichts über eine Schädigung im Mikrobereich aussagen, die möglicherweise lange vor Erreichen der Bruchgrenze stattfindet. So kann eine Erstbelastung bis nahe an die Bruchgrenze natürlich zur Folge haben, daß bei einer Zweitbelastung bis zum Bruch eine herabgesetzte Bruchgrenze gefunden wird. Grundsätzlich betrachtet ist es durchaus denkbar, daß sich die vorgestellten Bruchbedingungen so modifizieren lassen, daß mit ihnen auch Schädigungen bei kombinierter Beanspruchung behandelt werden können, wenn statt der Festigkeitsparameter Schädigungsgrenzspannungen als Parameter benutzt werden. Das ist aber nicht Gegenstand der hier angestellten Betrachtungen.

9.5.2 Vereinfachung bei 2D-Beanspruchung

Obwohl "2D"-Beanspruchung nur ein Kürzel für ebene Beanspruchung ist, wird hier – wie allgemein üblich – darunter der Sonderfall der ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung verstanden, der in der Faserverbundtechnik die allergrößte Bedeutung hat. Wenngleich die vorgestellte Forschungsarbeit ursprünglich in erster Linie auf 3D-Beanspruchung ausgerichtet war, haben sich in ihrem Verlauf überraschende Perspektiven für die 2D-Beanspruchung ergeben. Es hat sich als sehr empfehlenswert erwiesen, bei 2D-Beanspruchung die Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ vorzusetzen, weil sich damit erstaunliche Vereinfachungen erzielen lassen. Dies wird im folgenden erläutert.

Für die Fälle, in denen der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, d.h. in denen der Bruch in der Wirkebene der Spannungen σ_2 und τ_{21} erfolgt, kann man die ursprünglich mit $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ angesetzten Bruchbedingungen ohne weiteres auch mit σ_2 und τ_{21} schreiben, denn es ist $\sigma_n = \sigma_2, \tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = \tau_{21}$. Dies ist in Abschnitt 5.1.2 für die Modi A und B geschehen. Unter der Voraussetzung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}) = (p/R) = const.$ ergibt sich auch für den durch "schräge" Brüche ($\theta_{fp} \neq 0$) gekennzeichneten Modus C eine unerwartete Vereinfachung, so daß sich ein numerisches Suchen des Bruchwinkels θ_{fp} erübrigt. Auf

das Bestehen einer Vereinfachungsmöglichkeit wiesen Ergebnisse des Programms *Brukan* [77] hin, die zeigten, daß die Bruchebene sich immer gerade so weit aus der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} herausdreht, daß die auf der Bruchebene im Augenblick des Bruches wirkende Druckspannung σ_n (unabhängig von der Höhe der Druckspannung σ_2 beim Bruch) stets einen konstanten Wert annimmt. Beim parabolischen Ansatz und unter der Voraussetzung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}) = (p/R) = const.$ ist bei $\sigma_1 = 0$ der konstante Wert der Druckspannung auf der Bruchebene im Augenblick des Bruches $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$, **Bild 9.14**.

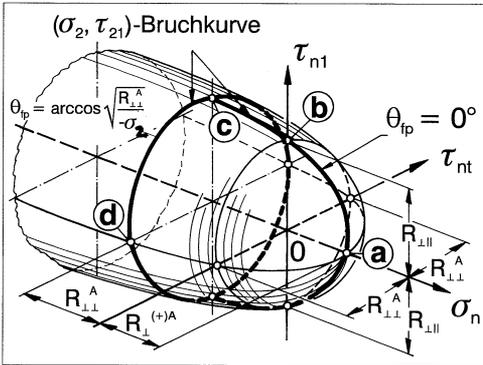


Bild 9.14: Verlauf der Bruch-Linie für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung auf der Master-Bruchfläche mit elliptischen Querschnitten und parabolischen Längsschnitten bei vorausgesetzter Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$

Dies gilt unabhängig von der Größe des sich im Bereich der Modus C einstellenden Bruchwinkels θ_{fp} . Damit wird der beim Bruch nach Modus C zu erwartende Bruchwinkel auf eine überraschend einfache Weise berechenbar, denn nach (8.1) ist $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{fp}$, und folglich ergibt sich mit der beim Bruch wirkenden Spannung $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$ für den Bruchwinkel

$$\theta_{fp} = \arccos \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_2)}} \quad \text{für Modus C bei } \sigma_1 = 0. \quad (9.50)$$

Achtung: Hierin ist σ_2 die **beim Bruch** nach Modus C erreichte Spannung.

Damit läßt sich nun auch für den Bruch-Modus C eine einfache analytische Lösung für die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve angeben; sie ist als Gl. (5.3) in der Tabelle 5.1 auf S. 62 erschienen und stellt eine Ellipse dar, die – unabhängig von den sonstigen Werkstoffeigenschaften – durch den Punkt $(\sigma_2 = -R_{\perp\perp}^A; \tau_{21} = 0)$ und durch den Koordinaten-Nullpunkt verläuft, Bild 5.1 auf S. 61. Wenn man für ein vorliegendes Verhältnis τ_{21}/σ_2 mit Hilfe der Gl. (5.3) die Druckspannung σ_2 beim Bruch nach Modus C bestimmt hat, kann man mit Gl. (9.50) den Bruchwinkel θ_{fp} berechnen.

Der mathematisch interessierte Leser findet hier zu dieser "Entdeckung" den Beweis. Der Ausgangspunkt hierfür ist der parabolische Ansatz (9.23), der sich unter der Voraussetzung $(p/R) = const.$ und mit $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta; \tau_{nt} = -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta$ und $\tau_{n1} = \tau_{21} \cos \theta$ bei

Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 nach Gln. (9.42) und (9.44) mit den Abkürzungen

$$a = \left[\left(\frac{p}{R} \right)^2 - \left(\frac{1}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \right] \sigma_2^2 \quad ; \quad b = \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \quad ; \quad c = \left(\frac{p}{R} \right) \sigma_2$$

folgendermaßen schreiben läßt:

$$\mathcal{E}(\theta_{fp}) = \frac{1}{f_w} \left(\cos \theta_{fp} \sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + c \cos^2 \theta_{fp} \right) = 1. \quad (9.51)$$

Es wird ein Bruchzustand betrachtet, deshalb gilt:

1. Der Bruch erfolgt auf der Schnittebene $\theta = \theta_{fp}$ mit der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$; es muß also sein

$$\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (9.52)$$

2. Bei θ_{fp} ist für den Spannungszustand $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ die Bruchbedingung erfüllt:

$$\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1. \quad (9.53)$$

Aus der 1. Bedingung folgt, weil f_w keine Funktion von θ ist:

$$\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\cos(\theta)} \frac{d\cos\theta}{d\theta} = \left(\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + \frac{a \cos^2 \theta_{fp}}{\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b}} + 2c \cos \theta_{fp} \right) (-\sin \theta_{fp}) = 0. \quad (9.54)$$

Die erste Lösung, $\theta_{fp} = 0^\circ$, wurde zur Formulierung der Bruchbedingung für Modus B benutzt. Zu einer zweiten Lösung gelangt man, wenn man aus (9.54) den Wurzelausdruck mit Hilfe der Bruchbedingung (9.51) eliminiert:

$$\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} = \frac{f_w}{\cos \theta_{fp}} - c \cos \theta_{fp}. \quad (9.55)$$

Damit wird aus Gl. (9.54) mit $\theta_{fp} \neq 0^\circ$:

$$\cos^4 \theta_{fp} = \frac{f_w^2}{c^2 - a} = \left(\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{\sigma_2} \right)^2. \quad (9.56)$$

Die angesetzte Bruchbedingung gilt nur für $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta < 0$, folglich muß sein:

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_2)}} \quad \text{für Modus C.} \quad (q.e.d.) \quad (9.57)$$

Auf den ersten Blick erweckt Gl. (9.57) den Eindruck, als hänge θ_{fp} über $f_w = f_w(\sigma_1)$ von der Spannung σ_1 ab. Dies trifft aber nicht zu, denn nicht nur der Zähler ist proportional

zu f_w , sondern auch die im Nenner stehende Spannung σ_2 (beim Bruchzustand!) nimmt unter der Einwirkung von σ_1 proportional zum Schwächungsfaktor f_w ab.

Das Einführen von (9.57) in (9.44) führt mit (9.42) auf die Bruchbedingung

$$\frac{1}{f_{w0}} \left\{ \left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^{(-)})R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(-)}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^{(-)}}{(-\sigma_2)} \right\} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für Modus C.} \quad (9.58)$$

Die entsprechende Gl. (5.3) in der Tabelle 5.1 auf S. 62 gilt für $\sigma_1 = 0$.

Damit der Bruchwinkel θ_{fp} beim Modus C nach Gl. (9.57) berechnet werden kann, muß zuvor für das vorliegende Verhältnis τ_{21}/σ_2 die Spannung σ_2 beim Bruch mit Hilfe der Bruchbedingung (9.58) ermittelt werden.

Es sei daran erinnert, daß die Gln. (9.57) und (9.58) unter der Voraussetzung der Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}) = \text{const.}$ hergeleitet wurden. Diese Kopplung ist nicht physikalisch begründet, sondern dient lediglich dazu, Rechenerleichterungen zu erzielen. Es stellt sich deshalb die Frage, welchen Einfluß Abweichungen von der obigen Parameterkopplung auf die Bruchkurve und den Bruchwinkel haben.

Durch die Gln. (9.12) und (9.13) auf S. 142 sind die folgenden physikalischen Zusammenhänge mit dem meßbaren [15,84] Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ aus dem einachsigen Quer-Druckbereich gegeben:

$$R_{\perp\perp}^A = - \frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2p_{\perp\perp}},$$

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = - \frac{\cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{1 + \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}.$$

Daraus ergibt sich mit dem Additionstheorem $\cos 2\Theta_{fp}^{(-)} = 2 \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)} - 1$ die Beziehung

$$R_{\perp\perp}^A = R_{\perp}^{(-)} \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)}. \quad (9.59)$$

Aufgrund der Zusammenhänge

$$\sigma_2 = -R_{\perp}^{(-)} \quad \text{und} \quad \sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)}$$

wird erkennbar, daß – auch unabhängig von der Parameterkopplung – für die Druckspannung σ_n auf der schrägen Bruchebene für die einachsige Quer-Druckbeanspruchung gilt:

$$\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A, \quad (9.60)$$

$$\cos \Theta_{fp}^{(-)} = \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp}^{(-)}}} \quad \text{für } \sigma_2 = -R_{\perp}^{(-)}. \quad (9.61)$$

Zwischen der reinen Druckbeanspruchung im Punkt d nach Bild 5.1 auf S. 61 und dem Umschlagpunkt c, wo der "schräge" Bruch des Modus C in einen "geraden" Bruch des Modus B umschlägt, bleibt σ_n auf der schrägen Bruchebene nun allerdings nicht mehr konstant, wie man leicht mit dem Rechenprogramm *Brukan* feststellen kann. Über die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve ohne vorausgesetzte Parameterkopplung läßt sich folgendes aussagen:

- Die den Modus B beschreibende Parabel wird nur von den Parametern $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ und $R_{\perp\parallel}^{(-)}$, nicht aber von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ bestimmt; sie bleibt also unbeeinflusst.
- Die Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ beeinflussen den für den Modus C geltenden Kurvenast. Dieser verläuft nach wie vor durch den für die einachsige Quer-Druckbeanspruchung geltenden Punkt $(-R_{\perp\perp}^{(-)}, 0)$, aber durch einen verschobenen Umschlagpunkt c.
- Der Umschlagpunkt c, der die Grenze zwischen den Modi B und C darstellt, wandert bei einem $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert, der größer ist als der aus der Parameterkopplung folgende $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert, zu (absolut gesehen) niedrigeren Quer-Druckspannungen; ist der $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert niedriger als der gekoppelte Wert, schlägt der Bruch-Modus bei (absolut gesehen) höheren Quer-Druckspannungen um.

Dies "Auswandern" des Umschlagpunktes fällt bei den in Betracht kommenden Werten für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ nur so geringfügig aus, daß auch die Kurvenäste für den Bruch-Modus C bei realistischen Veränderungen des $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wertes sich nur unwesentlich von demjenigen für gekoppelte p-Werte unterscheiden, **Bild 9.15** auf S. 166. Die Bruchbedingung (9.58) für gekoppelte p-Werte kann noch als sehr gute Näherung benutzt werden, wenn die Kopplung nicht gegeben ist. Auch die Gl. (9.57) für den Bruchwinkel kann als gute Näherung betrachtet werden; im Punkt d ist sie die exakte Lösung. Durch einen Korrekturterm kann die Näherung noch verbessert werden. Näheres wird in [65] ausgeführt.

9.6 Ergebnisdarstellung und -diskussion

9.6.1 Beispiele für Zfb-Bruchkörper

Mit der Möglichkeit, gemäß Abschnitt 8.5.3 Spannungen zu Haupt-Normalspannungen und resultierenden Schubspannungen "zusammenzufassen", kann die Zahl der Spannungen, die zur Angabe eines Zfb-relevanten Spannungszustands erforderlich sind, auf 3 reduziert werden. Durch die Benutzung von $\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1}$ und dem Parameter δ (Differenzwinkel zwischen den Richtungen von $\tau_{\omega 1}$ und σ_{II}) wird eine Visualisierung in einem dreidimensionalen Spannungsraum möglich. Sogar ein Einfluß der faserparallelen Spannung σ_1 kann

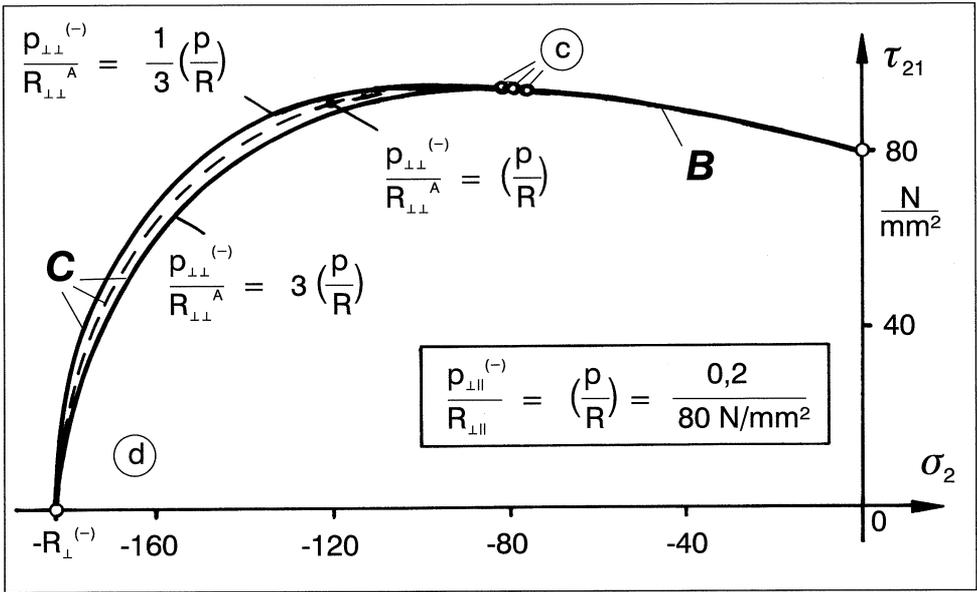


Bild 9.15: (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\sigma_1 = 0$. Selbst bei einer extremen Veränderung von $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A)$ gegenüber $(p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ mit den Faktoren $\frac{1}{3}$ bzw. 3 zeigt sich beim Modus C nur ein geringfügiger Einfluß.

noch durch eine "Schrumpfung" des Bruchkörpers, die einer Maßstabsänderung gleichkommt, berücksichtigt werden. So ist es grundsätzlich möglich, den nicht visualisierbaren Zfb-Bruchkörper im $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum durch eine Vielzahl von Bruchkörpern im $(\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ -Spannungsraum mit δ als Parameter darzustellen. Man könnte sozusagen ein "Album" solcher Bruchkörper anlegen. Prinzipiell ist es auch denkbar, ein entsprechendes "elektronisches Album" zu erstellen, d.h. sehr viele Daten der Bruchkörper ein für allemal vorab zu berechnen und abzuspeichern, um dann später bei einer Bruchanalyse die benötigten Daten entsprechend den $\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1}, \delta$ -Werten des Spannungszustands abzurufen. Dann müßte man nicht bei jedem zu analysierenden Spannungszustand aufwendig den Bruchwinkel suchen. Statt dessen wäre aber eine Interpolations-Prozedur erforderlich. Ob sich deshalb tatsächlich eine lohnende Einsparung an Rechenzeit ergibt, müßte noch geklärt werden.

Die **Bilder 9.16** und **9.17** zeigen zwei Beispiele von Bruchkörpern im $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ -Spannungsraum mit δ als Parameter, die mit dem Programm *Brukan-Visual 3D* [78] dargestellt und anschließend grafisch nachbearbeitet wurden.

Beim Bild 9.16 handelt es sich um den Fall $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ mit $\delta = 0^\circ$, d.h. die Richtungen

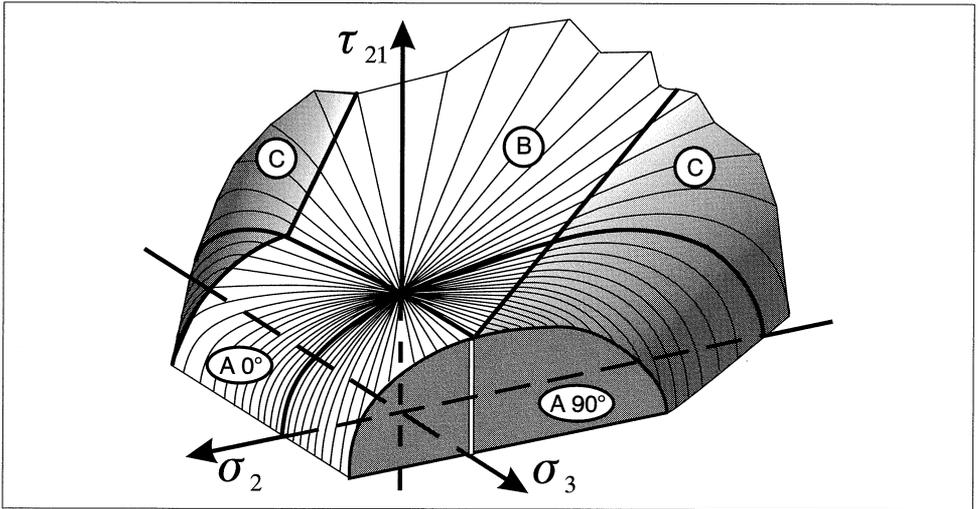


Bild 9.16: Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Spannungsraum. $\tau_{23} = \tau_{31} = 0$, $\sigma_2 = \sigma_{II}$; $\sigma_3 = \sigma_{III}$; $\tau_{21} = \tau_{\omega 1}$.

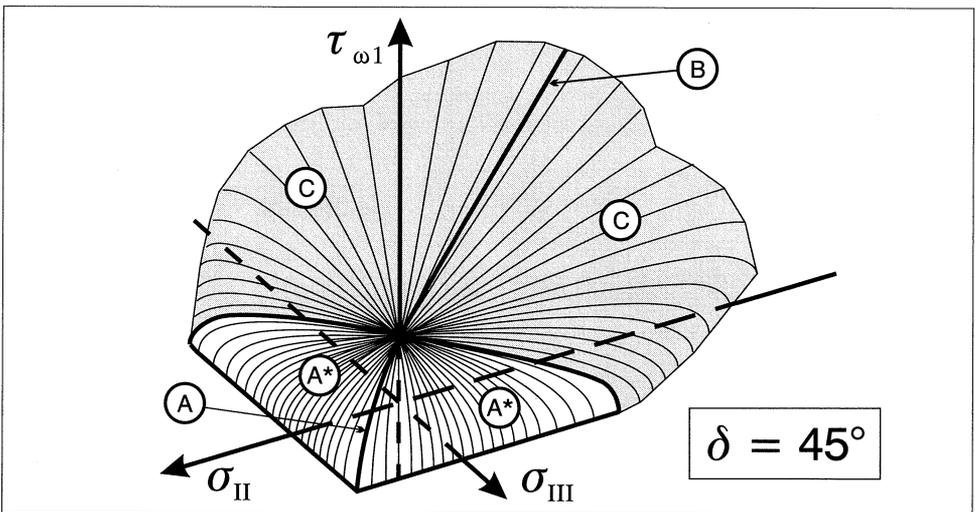


Bild 9.17: Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Spannungsraum. Zusätzlich zu den Spannungen $\sigma_2 = \sigma_{II}$, $\sigma_3 = \sigma_{III}$, τ_{21} wirkt eine Schubspannung $\tau_{31} = \tau_{21}$, $\omega = \delta = 45^\circ$. Aus $\tau_{21} = \tau_{31}$ wird $\tau_{\omega 1} = \sqrt{2}\tau_{21} = \sqrt{2}\tau_{31}$.

von σ_{II} und $\tau_{\omega 1}$ fallen zusammen, oder anders ausgedrückt: $\tau_{\omega 1} = \tau_{III1}$ und $\tau_{III1} = 0$. Ein solcher Beanspruchungszustand tritt z.B. bei GFK-Drehrohrfedern auf, und zwar in Form eines $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, \tau_{21})$ -Spannungszustands [20]. Ein Einfluß von σ_1 blieb unberücksichtigt.

Der dem Bild 9.17 zugrundeliegende Spannungszustand unterscheidet sich vom vorhergehenden nur dadurch, daß eine Spannung τ_{31} hinzugetreten ist, und zwar ist der Sonderfall $\tau_{31} = \tau_{21}$ gewählt worden. Dadurch wird $\delta = 45^\circ$. Die Richtung der resultierenden Schubspannung $\tau_{\omega 1} = (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^{1/2}$ verläuft also mittig zwischen den Richtungen von $\sigma_{II} = \sigma_2$ und $\sigma_{III} = \sigma_3$, so daß eine Symmetrie des Bruchkörpers bezüglich der Winkelhalbierenden zwischen der σ_{II} - und der σ_{III} -Richtung zu erwarten ist, die sich im Bild auch zeigt.

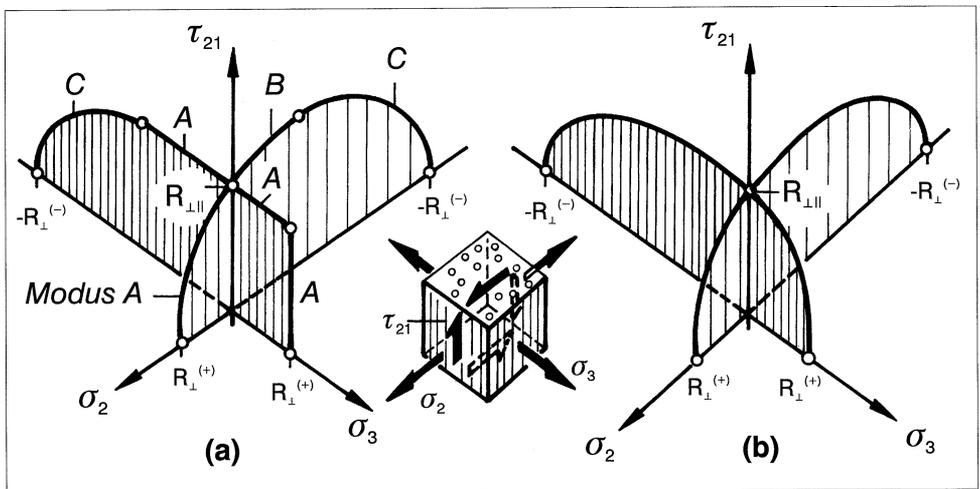


Bild 9.18: Schnitte $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$ durch $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Bruchkörper. (a) Schnitte durch den Bruchkörper nach Bild 9.16; angegeben sind die Bruch-Modi A, B, C. Beim Modus A und B ist der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$, deshalb findet bei den Spannungen σ_2 und τ_{21} , die beide auf der Bruchebene wirken, eine Interaktion statt. Die Spannungen σ_3 und τ_{21} haben keine gemeinsame Wirkebene und müssen daher bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ jeweils allein den Bruch bewirken. (b) Bei der Tsai, Wu-Brechbedingung, die keine physikalische Basis hat, unterscheiden sich die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve und die (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve nicht.

Auffallend an beiden Bildern ist, daß die Bruchkörper "Ecken und Kanten" aufweisen, was man beispielsweise von den ringsherum "glatten" Tsai, Wu-Bruchkörpern nicht kennt. Diese Ecken und Kanten zeigen ein "Umschlagen" von einem zu einem anderen Bruchgeschehen an. Dies wird beispielsweise durch Bild 9.18 verdeutlicht, wobei 9.18a zwei Schnitte durch den Bruchkörper von Bild 9.16 zeigt, und zwar die Schnitte $\sigma_3 = 0$ und $\sigma_2 = 0$. Besonders kraß sind die Unterschiede der Bruchkurven im 1. Quadranten. Diese erklären sich

daraus, daß σ_2 und τ_{21} eine gemeinsame Wirkebene haben und deshalb bei der Bruchzeugung zusammenwirken, σ_3 und τ_{21} aber nicht. Nach dem *Tsai, Wu*-Kriterium sind die Bruchkurven für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung und (σ_3, τ_{21}) -Beanspruchung vollkommen gleich, Bild 9.18b. Wenn man nicht über eine Bruchhypothese verfügt, bleibt auch nichts anderes übrig, als σ_2 und σ_3 gleich zu behandeln, weil beide σ_{\perp} -Beanspruchungen darstellen.

Ungewohnt ist auch, daß die Bruchkörper nach Bild 9.16 und 9.17 in Richtung der Spannungszustände $\sigma_2 \approx \sigma_3 < 0$ offen sind. Dies bedeutet natürlich nicht, daß der Werkstoff bei solchen Beanspruchungszuständen unbeschadet beliebig hohe Spannungen erträgt. Das benutzte Modell führt aber zu der Aussage, daß keine bruchauslösende $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Kombination auftritt. In Wirklichkeit sind wegen des – mikromechanisch gesehen – inhomogenen Spannungszustands, Bild 5.4 auf S. 68, ab einer gewissen Beanspruchungshöhe gravierende mikromechanische Schädigungen zu erwarten, die z.B. bei Entlastung nach einer nicht zum Bruch führenden Erstbelastung und einer anschließenden Quer-Zugbeanspruchung zu einer erniedrigten Quer-Zugfestigkeit führen müssen. Entsprechende Experimente werden z.Zt. entwickelt [79,84].

Daß für die Visualisierung von Bruchkörpern für $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustände die Transformation in $(\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1}, \delta)$ -Spannungszustände vorgenommen wurde, darf nicht in dem Sinne mißverstanden werden, daß eine solche Transformation auch beim praktischen Rechnen, beispielsweise zur Ermittlung eines Reservefaktors f_{Res} vorgenommen würde. Für einen normalen Rechenablauf ist ein solches "Umsteigen" in andere Koordinatensysteme nicht nötig. Die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ werden direkt aus dem $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand berechnet und in die Bruchbedingung eingesetzt. Wenn der Bruchwinkel θ_{fp} gefunden ist, wird mit diesem der Reservefaktor f_{Res} oder $f_{Res}^{(l)}$ berechnet. Aufgrund der Angaben über die auf der Bruchebene wirkenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ kann auch der vorliegende Bruch-Modus erkannt werden, s. nächsten Abschnitt.

Als "Nebenprodukt" der Bruchwinkelsuche erhält man den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ über dem Winkel θ , wie z.B. in Bild 8.11 auf S. 128.

Es ist recht erstaunlich, daß nur zwei Bruchbedingungen, eine für $\sigma_n \geq 0$ und eine für $\sigma_n < 0$, imstande sind, viele verschiedene Teil-Bruchflächen des Bruchkörpers im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum zu beschreiben. Dies erklärt sich letztendlich daraus, daß durch die Bruchwinkelsuche das (x_n, x_t) -Achsenkreuz für jeden Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ in die Richtung der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung gedreht wird. Dabei zeigt sich in bestimmten Bereichen die Bruchbedingung als Haupt-Normalspannungs-Bedingung, gelegentlich als Bruchbedingung der maximalen Quer/Längs-Schubspannung und in den meisten Fällen als "Mixed Mode-Kriterium".

9.6.2 Unterscheiden verschiedener Bruch-Modi

Bei Gültigkeit der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 lassen sich Bruch-Modi unterscheiden. Als Kriterium für diese dient die **auf der Bruchebene** auftretende Beanspruchungskombination.

Zunächst sind zwei größere Gruppen zu unterscheiden, und zwar entsprechend der Fallunterscheidung $\sigma_n < 0$ und $\sigma_n \geq 0$ die Gruppe mit $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und diejenige mit $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung, **Bild 9.19**. Jede der beiden σ_{\perp} -Beanspruchungen kann in Kombination mit einer der beiden Schubspannungen $\tau_{\perp\perp}$ oder $\tau_{\perp\parallel}$ auftreten oder in der Dreierkombination $\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ bzw. $\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

Der 2. Satz der Bruchbedingung schließt aus, daß $\sigma_{\perp}^{(-)}$ allein zu einem Bruch in der Wirkebene führt. Durch den 3. Satz ist ein Bruch der Wirkebene allein durch eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung ausgeschlossen und ebenfalls durch eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\perp}$.

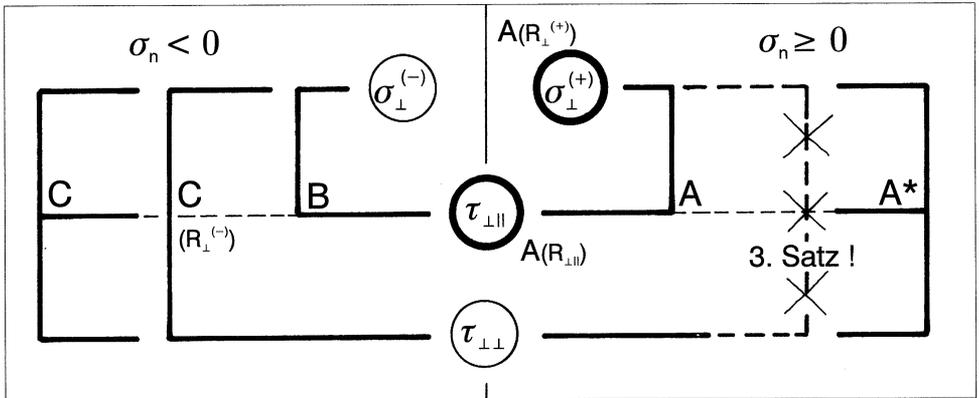


Bild 9.19: Unterscheidung von Bruch-Modi aufgrund aller möglichen Beanspruchungskombinationen, die auf einer Bruchebene wirken können. Die Beanspruchungen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ (dick ausgezogene Kreise) können jeweils allein auf einer Bruchebene auftreten, $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\perp}$ nicht.

Damit bleiben die Bruch-Modi A, A*, B und C nach Bild 9.19 übrig. Die unsystematische Bezeichnung der Modi rührt daher, daß die Modi-Unterscheidung anfänglich nur für den $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand vorgenommen wurde; in Teil I und Teil II wurde hierzu eingehend die Bruchfolgenabschätzung mit Hilfe der Modi A, B und C erörtert. Dabei war es möglich, die Bruchwinkel ($\theta_{fp} = 0^\circ$ bzw. $\theta_{fp} \neq 0^\circ$) den Modi A und B bzw. C zuzuordnen. Dies gelingt bei allgemeinen Spannungszuständen nicht mehr; der ermittelte Bruch-Modus muß in Verbindung mit dem errechneten Bruchwinkel im Einzelfall beurteilt werden.

Teil IV

Spezialprobleme, offene Fragen, Zukunftsaussichten

10 Spezialprobleme der Master-Bruchfläche

10.1 Vorbemerkungen

Während es sich bei den in Teil III vorgestellten Forschungsergebnissen größtenteils um weitgehend gesicherte Erkenntnisse handelte, werden die hier angesprochenen Spezialprobleme in der Forschung teilweise noch kontrovers diskutiert [79]. Sie werden voraussichtlich für die praktische Anwendung der neuen Bruchbedingungen keine große Rolle spielen, sie sind deshalb vor allem für diejenigen Leser von Bedeutung, die sich an der Weiterentwicklung der neuen Modelle beteiligen oder sich zumindest einen tieferen Einblick verschaffen wollen. Dabei wird sich erneut zeigen, wie hilfreich für das Verständnis mancher Phänomene eine weitgehende Visualisierung sein kann.

10.2 Der Vektorenfächer und seine Randkurve

Für einen Spannungszustandsvektor im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum wird hier vorausgesetzt, daß er unter Beibehaltung seiner Richtung aus dem Koordinatenursprung herauswächst, bis er mit seiner Spitze die Bruchfläche berührt. Die Bahn der Vektorspitze, der sog. "Lastpfad" ist also ein im Koordinaten-Nullpunkt entspringender Strahl.

Auch die zum Bruch führende Spannungscombination $\{\sigma_n(\theta_{fp}), \tau_{nt}(\theta_{fp}), \tau_{n1}(\theta_{fp})\}$ stellt im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum einen von "null" bis zur Berührung mit der Master-Bruchfläche anwachsenden Spannungsvektor dar, aber seine durch den Bruchwinkel θ_{fp} bestimmte Richtung ist nicht von vornherein bekannt. Um diese zu finden, muß der ganze denkbare Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, in dem θ_{fp} auftreten kann, nach demjenigen Vektor abgesehen werden, der mit dem kleinsten Streckungsfaktor verlängert werden muß, damit er die Master-Bruchfläche berührt. In diesem 180° -Winkelbereich gibt es unendlich viele Vektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$, von denen im allgemeinen jeder in eine andere Richtung aus dem Koordinatenursprung herauswächst, denn die Komponenten $\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)$ hängen über verschiedene Winkelfunktionen mit den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ zusammen, Gl. (8.1). Alle in dem Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ auftretenden Spannungsvektoren, die einen

festen Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ repräsentieren, bilden zusammen einen "Vektorenfächer" im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum.

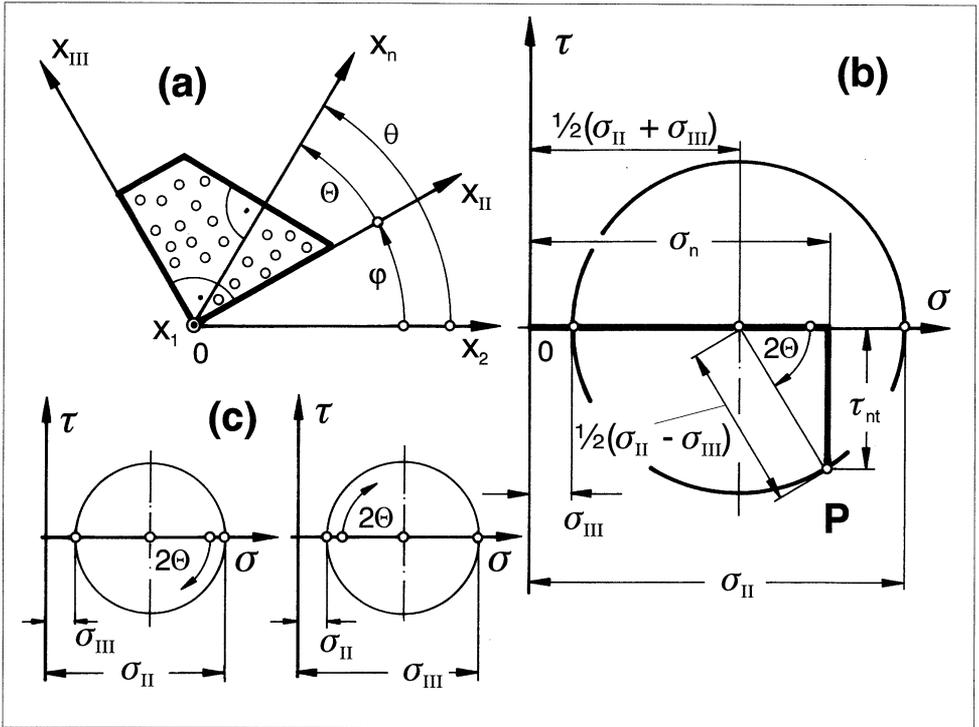


Bild 10.1: Mohrscher Spannungskreis zur Ermittlung der Spannung σ und τ auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ , ausgehend von den beiden Haupt-Normalspannungen σ_{II} und σ_{III}

Dessen Visualisierung gelingt am ehesten, wenn man den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand, wie in Abschnitt 8.5.3 beschrieben, durch die beiden Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene $\sigma_{II}, \sigma_{III}$ (aus $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$) und die resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ (aus τ_{31} und τ_{21}) ausdrückt. Da $\tau_{II III} = 0$ ist, lassen sich die Transformationsformeln für $\sigma_n(\theta)$ und $\tau_{nt}(\theta)$ mit Hilfe der bei Gl. (8.1) angegebenen Additionstheoreme stark vereinfachen. Wenn $\tau_{23} \neq 0$ ist, fallen die Richtungen von σ_2 und σ_{II} nicht zusammen; sie unterscheiden sich durch den Winkel φ nach Gl. (8.14) voneinander. Deshalb wird, wenn man von den Ebenen ausgeht, auf denen σ_{II} bzw. σ_{III} wirkt, nicht mehr der Winkel θ zwischen der x_2 -Achse und der x_n -Achse, sondern der Winkel Θ zwischen der x_{II} -Achse und der x_n -Achse benutzt. Zum Auffinden des Bruchwinkels wird nun auch nicht mehr der Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, sondern der Winkelbereich

$-90^\circ \leq \Theta \leq +90^\circ$ abgesucht, was zum gleichen Ergebnis führt, denn es wird in jedem Fall die Schnittebene mit dem höchsten $\mathcal{E}(\theta)$ -Wert gefunden.

Die so vereinfachten Beziehungen für σ_n und τ_{nt} lauten:

$$\sigma_n(\Theta) = \frac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos 2\Theta, \quad (10.1)$$

$$\tau_{nt}(\Theta) = -\frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \sin 2\Theta. \quad (10.2)$$

Sie ermöglichen die Bestimmung von $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ mit Hilfe des sogenannten Mohrschen Spannungskreises, **Bild 10.1**. Er hat seinen Mittelpunkt auf der σ -Achse und schneidet diese an den Stellen σ_{II} und σ_{III} . Gemäß (10.1) und (10.2) hat ein Punkt P die Koordinaten $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$, wenn man in geeigneter Weise am Mohrschen Kreis einen Winkel 2Θ abträgt, Bild 10.1b. Den Punkt P mit seinen – auch mit dem korrekten Vorzeichen versehenen – Koordinaten $\sigma_n(\Theta)$ auf der Abszisse und $\tau_{nt}(\Theta)$ auf der Ordinate findet man, indem man einen Radius des Kreises im mathematisch negativen Drehsinn (wegen des negativen Vorzeichens von $\tau_{nt}(\Theta)$) um einen Winkel 2Θ aus der σ_{II} -Richtung herausdreht. Der Winkel 2Θ zählt von der Richtung aus, die nach σ_{II} zeigt, so daß sich für $\sigma_{II} > \sigma_{III}$ der Winkel 2Θ an der Stelle nach Bild 10.1c (links), für $\sigma_{II} < \sigma_{III}$ aber an der Stelle gemäß Bild 10.1c (rechts) findet. Am Werkstoffelement, Bild 10.1a, gelangt man durch eine mathematisch positive Drehung um 90° von der Wirkebene der Spannung σ_{II} in die Wirkebene der Spannung σ_{III} ; im Mohrschen Kreis gehört eine im mathematisch negativen Sinne ausgeführte Drehung um 180° dazu, um von σ_{II} nach σ_{III} zu gelangen.

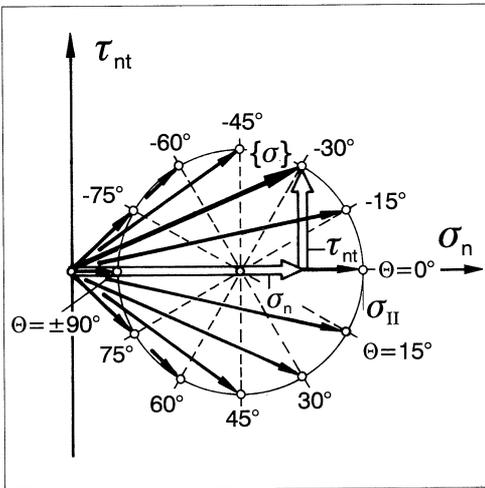


Bild 10.2: Ebener Vektorenfächer für einen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Spannungszustand. Jeder Punkt des Mohrschen Spannungskreises wird von der Spitze eines Spannungsvektors berührt.

Wenn bei einem festgehaltenen ebenen Spannungszustand $\{\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}\}$ (gleichbedeutend mit $\{\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0\}$) die Spannungen auf allen Schnittebenen unter Winkeln $-90^\circ \leq \Theta \leq +90^\circ$ betrachtet werden, wird jeder Punkt P des Mohrschen Kreises von der Spitze eines Vektors $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta)\}$ berührt, dessen Fußpunkt der Koordinaten-Nullpunkt ist. Bei $\tau_{31} = \tau_{21} = 0$ (d.h. auch $\tau_{\omega 1} = 0$) ist der Vektorenfächer, von dessen geometrischer Gestalt man eine Vorstellung gewinnen möchte, demnach eine ebene Figur, **Bild 10.2** auf S. 175. Sein Rand ist der Mohrsche Spannungskreis.

Das Bild ändert sich, wenn zusätzlich eine Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ wirkt. Nun tritt zu den bereits vorhandenen Vektorkomponenten $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ als dritte Komponente $\tau_{n1}(\Theta)$ hinzu. Am realen Werkstoffelement wirkt die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$ in einer Richtung, die senkrecht auf der aus $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ gebildeten Ebene steht, s. Bild 4.3 auf S. 50. Genau die gleiche Situation kann man bei der Visualisierung der drei Spannungen erzeugen, wenn man $\tau_{n1}(\Theta)$ senkrecht über der Zeichenebene des Mohrschen Kreises aufträgt. Wenn für das Auftragen von $\tau_{n1}(\Theta)$ der gleiche Spannungsmaßstab gewählt wird wie für den Mohrschen Spannungskreis, bildet der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta), \tau_{n1}(\Theta)\}$ die Spannungen des Werkstoffelements, die auf der zur x_n -Richtung senkrechten Schnittebene wirken, naturgetreu ab. (Weil am realen Werkstoffelement die 3 Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ eine gemeinsame Wirkebene haben, kann man auch sie zu einer schräg auf der Wirkebene stehenden resultierenden Spannung $\{\sigma\}$ zusammenfassen, s. Bild 4.3.)

Nur in Ausnahmefällen wirken die Haupt-Normalspannung σ_{II} und die resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auf der gleichen Schnittebene. Das wäre nur der Fall, wenn die Winkel φ und ω nach Gl. (8.14) bzw. Gl. (8.17) gleich wären. Meistens tritt eine Winkeldifferenz

$$\delta = \omega - \varphi. \quad (10.3)$$

auf. In einer Schnittebene, die um einen Winkel Θ gegenüber der Wirkebene von σ_{II} gedreht ist, wirkt im allgemeinen Fall neben den Spannungen $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ nach den Gln. (10.1) und (10.2) auch noch die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$. Sie errechnet sich aus

$$\tau_{n1}(\Theta) = \tau_{\omega 1} \cos(\Theta - \delta) = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2} \cos(\Theta - \delta). \quad (10.4)$$

Diese einfache Transformation ergibt sich, weil in der gegenüber der x_ω -Richtung um 90° gedrehten Richtung die Schubspannung $\tau_{(\omega+90^\circ)1} = 0$ ist, s. Bild 8.14 auf S. 133.

Wenn man bei der Bruchwinkelsuche den Winkel Θ von -90° bis $+90^\circ$ laufen läßt, stellt sich gemäß Gl. (10.4) die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$ als ein 180° -Abschnitt einer Cosinus-Kurve mit der Amplitude $\tau_{\omega 1} = (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$ dar. Diese Cosinus-Halbwellen werden senkrecht über dem Mohrschen Spannungskreis aufgetragen. Zu einer Drehung der Schnittebene von $\Theta = 0^\circ$ bis $+90^\circ$ gehört im Mohrschen Spannungskreis eine Drehung um 180° im mathematisch negativen Sinn, und zu einer realen Drehung von $\Theta = 0^\circ$ bis -90° am Mohrschen Kreis eine Drehung um 180° im mathematisch positiven Sinn. Die Cosinus-Halbwellen erstrecken sich

also über den ganzen Umfang des Mohrschen Kreises; man kann sich zur Veranschaulichung vorstellen, daß ein 180° -Abschnitt einer Cosinuskurve auf die Mantelfläche eines Zylinders aufgewickelt ist, der über dem Mohrschen Kreis errichtet wird.

Wenn die Richtungen von σ_{II} und $\tau_{\omega 1}$ zusammenfallen, d.h. $\delta = 0^\circ$ ist, hat die Cosinus-Kurve ihren Extremwert an der Stelle, an der σ_{II} auftritt. Falls zwischen x_{II} und x_ω eine Winkeldifferenz δ existiert, zeigt die Cosinus-Welle über dem Mohrschen Kreis eine "Phasenverschiebung" um 2δ , **Bild 10.3**. (Wenn bei der Bruchwinkelsuche Θ von -90° bis $+90^\circ$ läuft, wechselt die Cosinus-Halbwellen, d.h. die Schubspannung $\tau_{\omega 1}$, an der Stelle σ_{III} ihr Vorzeichen. Dies hat aber keinen Einfluß auf die Bruchgefahr. Man könnte die Bruchwinkelsuche auch mit $-90^\circ \leq (\Theta - \delta) \leq 90^\circ$ ausführen; dann bleibt τ_{n1} immer positiv.)

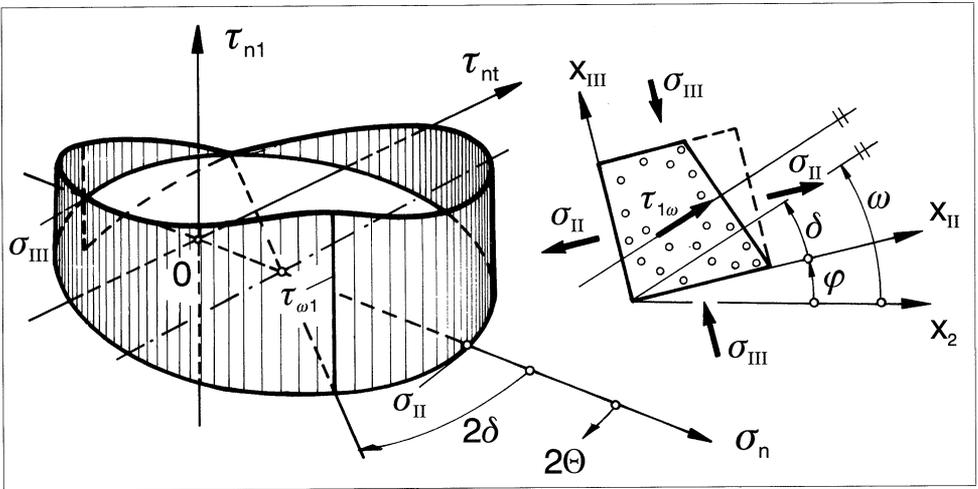


Bild 10.3: Berandungskurve eines räumlichen Vektorenfächers für einen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand

Jeder Punkt der auf den "Mohrschen Zylinder" aufgewickelten Cosinus-Halbwellen wird von der Spitze eines Spannungsvektors $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta), \tau_{n1}(\Theta)\}$ berührt. Sobald eine Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auftritt, ist demzufolge der Vektorenfächer keine ebene Figur mehr, sondern eine räumliche Fläche. Der Rand des Vektorenfächers ist die auf einen Kreiszyylinder "aufgewickelte" 180° -Cosinus-Linie. **Bild 10.4** zeigt Vektorenfächer für den wichtigen Sonderfall der ebenen (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung, und zwar für $\sigma_2 < 0$ und $\sigma_2 > 0$.

Die gewonnene Vorstellung von der Randkurve des Vektorenfächers im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum ist die Voraussetzung für das Verstehen der Probleme der folgenden Abschnitte.

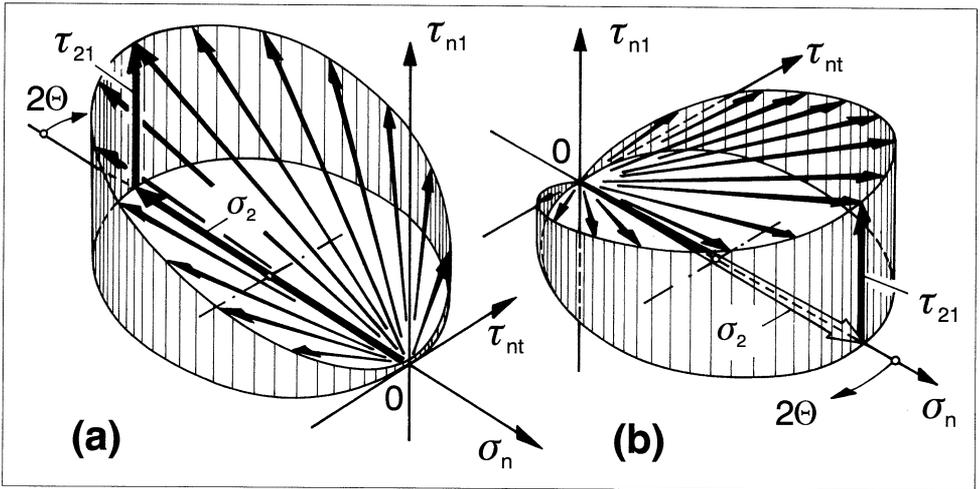


Bild 10.4: Räumlicher Vektorenfächer für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchungen (a) für $\sigma_2 < 0$ und (b) für $\sigma_2 > 0$

10.3 Sensitivität des Bruchwinkels

Aus den vorausgegangenen Betrachtungen ergeben sich einige wichtige Schlussfolgerungen. Es hat sich gezeigt, daß die Berandung des zu einem bruchauslösenden $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand gehörenden Vektorenfächers, die von innen her an einer Stelle die Master-Bruchfläche berührt, eine "sanft geschwungene" räumliche Kurve ist. Man kann sich Situationen vorstellen, in denen das Stück der Cosinus-Halbwellen, auf dem der Berührungspunkt mit der Master-Bruchfläche zu finden ist, sich nahezu an die Master-Bruchfläche anschmiegt. Kleine Veränderungen der Form der Master-Bruchfläche würden in einem solchen Fall den Berührungspunkt merklich verschieben. Dies bedeutet, daß – abhängig von der gewählten Bruchbedingung und ihren Parametern – für einige Spannungszustände eine relativ hohe Sensitivität des Bruchwinkels θ_{fp} gegenüber der Gestalt der Master-Bruchfläche auftreten kann. Viel weniger empfindlich werden die für den Bruchzustand errechneten Spannungen auf kleine Veränderungen der Form der Master-Bruchfläche reagieren.

10.4 "Blinde Flecken" und "tote Räume"

Man kann sich sehr gut vorstellen, daß es an der Kuppel der Master-Bruchfläche für $\sigma_n \geq 0$ "ausgebuchtete" Bereiche gibt, die stärker gekrümmt sind als die Randkurven der Vektorenfächer.

renfächer, die in diesem Bereich auftreten, so daß die Cosinus-Halbwellen bestimmte Teile der Master-Bruchfläche nicht berühren können, weil der Kontakt vorher an anderer Stelle erfolgt. Rechenbeispiele mit Parametern für GFK bzw. CFK haben gezeigt, daß in einigen Oberflächenpartien der Master-Bruchfläche keine Berührungspunkte, d.h. keine Bruchzustände auftreten. Diese unberührbaren Gebiete oder sogenannten "blinden Flecken" auf der Master-Bruchfläche befinden sich größtenteils auf der für $\sigma_n \geq 0$ gültigen Kuppel.

Zum gleichen Ergebnis gelangt *Jeltsch-Fricker* [55] folgendermaßen: Wenn eine Master-Bruchfläche mathematisch formuliert wurde, z.B. durch die Angabe der Bruchbedingungen (9.23) für $\sigma_n < 0$ und (9.32) für $\sigma_n \geq 0$, kann damit der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum berechnet werden. Wird dieser nun (z.B. in Form einer unendlich großen Menge von Cosinus-Halbwellen über Mohrschen Kreisen) in den $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum zurückübertragen, zeigt es sich, daß die Fläche, die alle möglichen Vektorenfächer einhüllt, stellenweise kleiner sein kann als die Master-Bruchfläche, von der ausgegangen wurde. Zwischen beiden entsteht örtlich "toter Raum". Dieser Sachverhalt läßt sich am ehesten am ebenen Sonderfall demonstrieren [85].

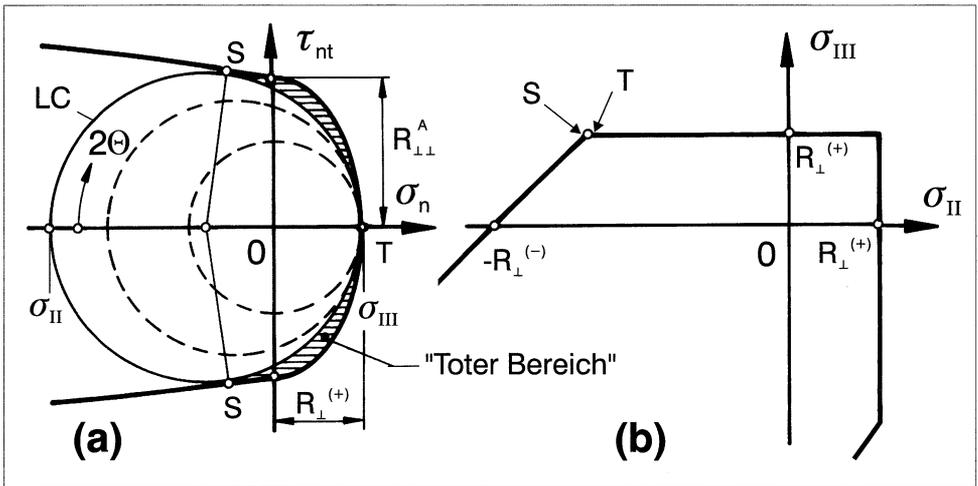


Bild 10.5: Zfb-Bruchkurven für eine ebene Beanspruchung in der transversal-isotropen (x_2, x_3) -Ebene. (a) (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve mit Grenzkreis LC (Limiting Circle) und "toter Bereich"; (b) $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Bruchkurve; S (Shear) bedeutet Schubbruch, T (Tension) Zugbruch.

In **Bild 10.5** ist unter (a) der Schnitt durch die Master-Bruchfläche bei $\tau_{n1} = 0$ dargestellt, d.h. die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve. Mit dieser kann die Bruchfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum berechnet werden, die aber durch den Übergang auf den zu $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ gehören-

den Haupt-Normalspannungszustand $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0)$ auch als $\sigma_{II}, \sigma_{III}$ -Bruchkurve dargestellt werden kann, Bild 10.5b. Wenn man die durch diese Bruchkurve umschlossenen, nicht zum Bruch führenden Spannungszustände in das Bild 10.5a rücküberträgt, füllt sich die von der Master-Bruchkurve umgebene Fläche mit Mohrschen Spannungskreisen (Cosinus-Halbwellen mit Amplitude "null"), mit Ausnahme des schraffierten "toten" Bereichs [85]. Falls man die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve so korrigieren würde, daß dieser tote Bereich verschwindet, würde dies an der sich errechnenden $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Bruchkurve nichts ändern. Diese am "ebenen" Beispiel gezeigten Zusammenhänge können auch in den $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum übertragen werden. *Jeltsch-Fricker* [55] definiert als "Totraum" das Volumen des Master-Bruchkörpers, das man entfernen kann, ohne daß sich damit am Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum irgend etwas ändert.

Wenn Toträume auch keinen Einfluß auf die Bruch-Spannungszustände haben, so beeinflussen sie doch die errechnete Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ für $\theta \neq \theta_{fp}$. Die Form der Kurve "Bruchgefahr über dem Winkel θ ", die evtl. für probabilistische Auswertungen herangezogen werden soll, fällt mit einem Totraum weniger "völlig" aus als ohne Totraum [55]. Wenn man durch mathematische Modifikation der Bruchbedingung dafür sorgen würde, daß kein Totraum mehr auftritt, würde man überall in Abhängigkeit von θ die höchstmögliche Bruchgefahr errechnen. Ob man damit jedoch der Wirklichkeit näher kommt als bei Existenz des Totraumes, ist schwer zu sagen. Die zur Klärung dieser Frage erforderlichen experimentellen Untersuchungen sind deshalb so schwierig, weil man immer nur Brüche (bei $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$) erzeugen, aber keine Anstrengungen $\mathcal{E}(\theta) < 1$ messen kann.

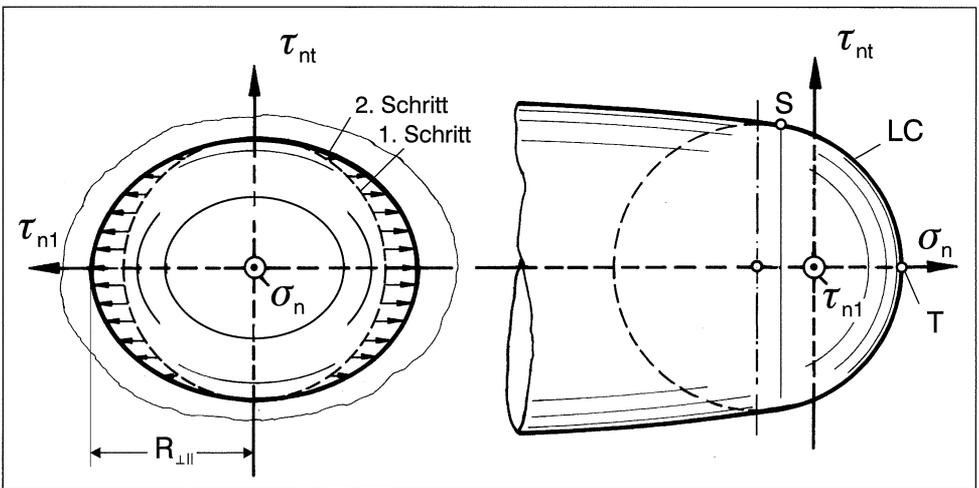


Bild 10.6: Alternativer $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchkörper, an dem kein "Totraum" auftreten kann.

Mit **Bild 10.6** wird demonstriert, welche Auswirkungen die Wegnahme des Totraums hat. Es ist ein Master-Bruchkörper gezeigt, der keinen Totraum hat. In der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene bildet der Grenzkreis LC zwischen den Punkten S und T (vgl. Bild 10.5) die Bruchkurve. Im Punkt S schließt an den Grenzkreis, (LC), bei dem sowohl Schubbruch (S) als auch Zugbruch (T) erfolgen kann, die parabolische "Hüllkurve" mit gleicher Steigung an. Den endgültigen Master-Bruchkörper kann man sich nun in zwei Schritten erzeugt denken. Im ersten Schritt läßt man die aus Grenzkreis und Parabel bestehende Bruchkurve um die σ_n -Achse rotieren. Der dadurch erzeugte Körper aus Kugelkalotte und anschließendem Rotationsparaboloid wird in einem zweiten Schritt in Richtung der τ_{n1} -Achse so "verstreckt", daß die Oberfläche die τ_{n1} -Achse bei $R_{\perp\parallel}$ schneidet. Damit ist ein Körper entstanden, dessen Oberfläche nirgends eine Unstetigkeit aufweist. Die Fallunterscheidung wäre nun nicht mehr an der Stelle $\sigma_n = 0$, sondern an der Stelle $\sigma_n(S)$ vorzunehmen. Rechts von dieser Stelle sind alle Schnitte $\tau_{n1} = \text{const.}$ Grenz-Kreise, nicht nur in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene bei $\tau_{n1} = 0$. Es gibt also keine unberührbaren Gebiete. Dort wo die Master-Bruchfläche aus Grenzkreisen gebildet wird, kann der Bruchwinkel jeden Wert zwischen 0° beim Zugbruch und dem zum Berührungspunkt S (Bild 10.5) gehörenden Bruchwinkel annehmen. Dies steht im Widerspruch zum 3. Satz der Bruchhypothese. (Bei dem gezeigten Bruchkörper gilt die übliche Kopplung der p -Parameter $(p/R) = \text{const.}$ und es ist $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(+)}$.)

10.5 Vorüberlegungen zu Fragen der Probabilistik

Aus Gründen der Probabilistik können die Ecken und Kanten der Bruchkörper in Wirklichkeit nicht so scharf ausfallen, wie sie in den Bildern 9.16 und 9.17 erscheinen. Dies kann man sich besonders leicht durch den Vergleich der einachsigen Zugbeanspruchung mit dem sogenannten isotropen Zug-Spannungszustand $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$ vergegenwärtigen. Im letztgenannten Fall ist $\sigma_n(\theta) = \sigma(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \sigma$ und damit auch die Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ in jeder Richtung θ gleich groß. Fehlstellen in Form von Härtungsrissen, "flachgedrückten" Luftblasen und unverbundenen Partien der Faser/Matrix-Grenzfläche haben einen "Richtungssinn". Bei $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -Beanspruchung kann jede in irgendeiner Richtung θ verlaufende gravierende Fehlstelle bruchauslösend wirken, während bei einachsiger σ_2 -Beanspruchung eine entsprechende Fehlstelle nur dann bruchwirksam wird, wenn sie ungefähr in der Richtung $\theta = 0^\circ$ orientiert ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Bruches bei isotroper Quer-Zugbeanspruchung muß demnach höher sein als bei einachsiger Quer-Zugbeanspruchung. Deshalb ist zu erwarten, daß der Mittelwert der Bruchspannung niedriger ist als beim einachsigen Zug. Da man von der Bruchwinkelsuche her den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung oder Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ über dem Winkel θ kennt, erscheint es möglich, das Modell auch für statistische Vorhersagen zu benutzen.

Beim Rechenprogramm *Brukan* [77] wird der Bruchwinkel θ_{fp} gesucht, indem eine Vielzahl von Werten $\mathcal{E}(\theta)$ im Bereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ berechnet und miteinander verglichen werden. Es liegt deshalb nahe, sich einen ersten Einblick in die angesprochenen Fragen zu verschaffen, indem man Flächeninhalte unter der $\mathcal{E}(\theta)$ -Kurve aufsummiert, dabei aber nur den Anteil von $\mathcal{E}(\theta)$ berücksichtigt, der einen gewählten "Schwellenwert" (threshold) von z.B. $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$ überschreitet. Je größer der berechnete Flächeninhalt, um so größer dürfte die Wahrscheinlichkeit sein, daß eine gravierende Fehlstelle einen "vorzeitigen" Bruch auslöst. So erwartet man z.B. auch bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung, bei dem sowohl der Bruchwinkel $\theta_{fp} \approx 50^\circ$ als auch der Bruchwinkel $\theta_{fp} \approx -50^\circ$ auftreten kann, eine etwas höhere Wahrscheinlichkeit der Bruchauslösung als beim einachsigen Quer-Zugversuch, bei dem der Bruch nur bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ erfolgen kann.

Da näher bei $\mathcal{E}(\theta) = 1$ liegende Flächenelemente höher zu bewerten sind als solche, die in der Nähe des Schwellenwertes liegen, sollte man eigentlich nicht die Flächeninhalte, sondern ihre statischen Momente (Fläche x Abstand des Schwerpunkts vom Schwellenwert) vergleichen. So wird beim **Bild 10.7** verfahren [86].

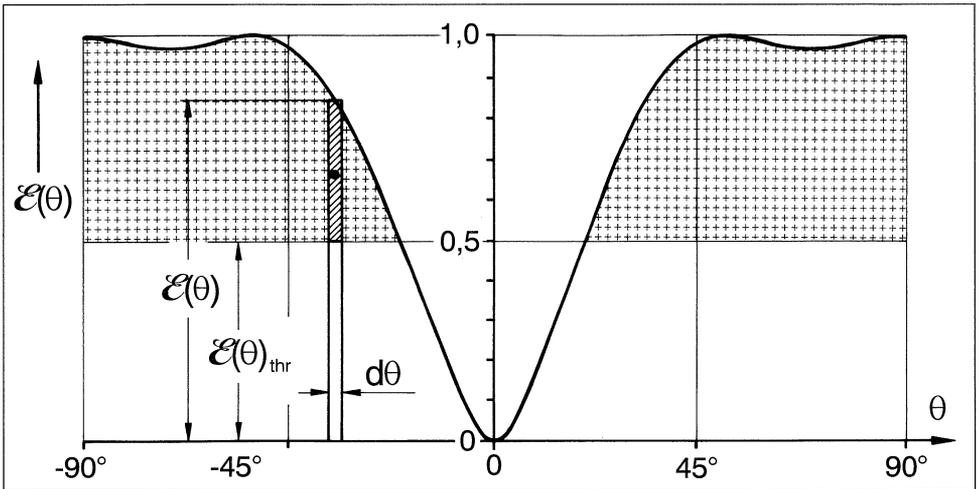


Bild 10.7: Zur Berechnung des "statischen Moments" der Fläche oberhalb eines Schwellenwertes $\mathcal{E}(\theta)_{thr}$ der schnitwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ am Beispiel des zum Grenzkreis nach Bild 10.5 gehörenden $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Spannungszustands

Ausgegangen wird von einer Kurve $\mathcal{E}(\theta)$, $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, die beim Bruchwinkel θ_{fp} den Wert $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$ aufweist. Als Schwellenwert, ab dem $\mathcal{E}(\theta)$ als relevant für eine Bruchauslösung durch Fehlstellen angesehen wird, ist $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$ gewählt worden.

Das "statische Moment" der Fläche oberhalb dieses Schwellenwertes, bezogen auf die Linie $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$, ist:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-90^\circ}^{90^\circ} (\mathcal{E}(\theta) - \mathcal{E}(\theta)_{thr})^2 d\theta \quad \text{für } \mathcal{E}(\theta) \geq \mathcal{E}(\theta)_{thr}. \quad (10.5)$$

Um einen Bezugswert S^* zu schaffen, wertet man die $\mathcal{E}(\theta)$ -Kurve für einachsige Quer-Zugbeanspruchung gemäß Gl. (10.5) aus.

Mit den Bezeichnungen S für den zu beurteilenden Spannungszustand und S^* für die einachsige Quer-Zugbeanspruchung sowie S^{**} für die isotrope zweiachsige Zugbeanspruchung wird dann folgender Ansatz gemacht:

$$\{\sigma\}_{red} = \{\sigma\}_{mod} \left[1 - \Delta^{**} \frac{S - S^*}{S^{**} - S^*} \right]. \quad (10.6)$$

Hierin sind:

- $\{\sigma\}_{red}$ die Größe des "probabilistisch" reduzierten Bruchspannungszustands-Vektors für einen beliebig gewählten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand,
- $\{\sigma\}_{mod}$ die Größe des mit dem Bruch-Modell ermittelten Bruchvektors,
- S^* das statische Moment nach Gl. (10.5) für einachsige Zugspannung σ_2 ,
- S^{**} das statische Moment nach Gl. (10.5) für den Spannungszustand $\sigma_2 = \sigma_3$, alle anderen Spannungen "null",
- Δ^{**} die relative Abweichung zwischen Versuchsergebnissen und Modell bei zweiachsiger Zugbeanspruchung $\sigma_2 = \sigma_3$.

Für die hier durchgeführte Beispielrechnung wurde als aus Versuchen bekannt angenommen, daß bei zweiachsiger Zugbeanspruchung mit $\sigma_2 = \sigma_3$ die reale Festigkeit um 20% gegenüber dem mit der Bruchbedingung errechneten theoretischen Wert reduziert ist, während bei einachsiger σ_2 -Beanspruchung das Modell durch den Parameter $R_{\perp}^{(+)}$ an die Versuchsergebnisse angepasst ist. Damit ergibt sich in Gl. (10.6) der Wert $\Delta^{**} = 0,2$. Nach dieser "Kalibrierung" kann nun die Reduzierung der mit dem Modell berechneten Bruchspannungen für jeden beliebigen Spannungszustand gemäß Gl. (10.6) vorgenommen werden. Jeder Spannungszustand, dessen $\mathcal{E}(\theta)$ -Verteilung "völliger" ist als diejenige für einachsige σ_2 -Beanspruchung, d.h. für den $S > S^*$ ist, erfährt somit eine Reduzierung der theoretischen Festigkeit.

Auf diese Weise und mit den angenommenen Werten sind die (σ_2, σ_3) - und die (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve nach **Bild 10.8** berechnet worden, bei denen nun "gerundete Ecken" auftreten.

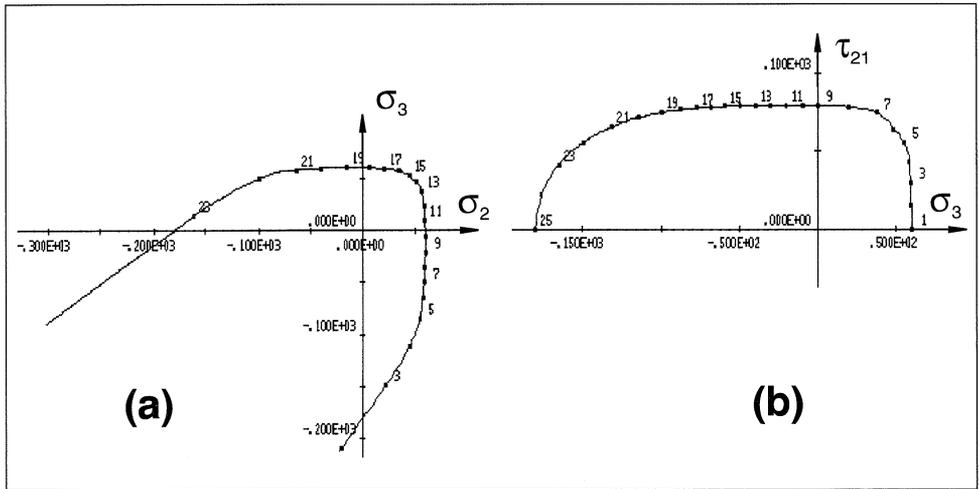


Bild 10.8: (σ_2, σ_3) -Bruchkurve (a) und (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve (b) mit durch Gl. (10.6) "gerundeten Ecken"

10.6 Versuch einer Beurteilung

Im folgenden wird versucht, die Ergebnisse der Abschnitte 10.3 bis 10.5 kritisch zu bewerten.

In der Frage der Sensitivität des Bruchwinkels, die sich aufgrund der Modellvorstellung von der Master-Bruchfläche und der Berandung des Vektorenfächers in Form einer räumlichen Cosinus-Halbwelle ergab, kann man annehmen, daß es auch in der Wirklichkeit bestimmte Spannungszustände gibt, bei denen der Bruchwinkel sehr empfindlich auf kleine Unregelmäßigkeiten am realen Verbundstoff reagiert. Wenn solche Bereiche erkannt werden können, wird man diese tunlichst für die experimentelle Verifikation der Modelle meiden.

Zur Problematik der "blinden Flecken" oder "toten Räume" ist zunächst zu bemerken, daß mit den beiden verschiedenen Bezeichnungen ein und dasselbe Phänomen angesprochen wird, nämlich die Unberührbarkeit bestimmter Teile der Master-Bruchfläche durch Cosinus-Halbwellen oder – anders ausgedrückt – das Auftreten von "Hohlraum" zwischen der Master-Bruchfläche und dem durch die Menge aller ohne Bruch ertragbaren Spannungszustände gebildeten "Bruch"-Körper.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Erscheinungen eine Entsprechung in der Realität besitzen oder ob man danach trachten sollte, die Toträume an der Master-Bruchfläche durch entsprechende mathematische Modifikation der Bruchbedingungen zu beseitigen [79,85]. Diese Frage kann definitiv nur durch Experimente geklärt werden. Aus der Sicht des Autors besteht aber – bis zum Beweis des Gegenteils – der Totraum an der Master-Bruchfläche zu

Recht. Der Totraum zwingt den Bruchwinkel bei kleinen Veränderungen bestimmter Spannungszustände zu "springen", statt sich kontinuierlich mit dem Spannungszustand zu ändern. Das wird besonders bei dem schon mehrfach diskutierten Spannungszustand deutlich, der durch den Grenzkreis repräsentiert wird, vgl. Bilder 10.5 auf S. 179 und 10.7 auf S. 182. Würde man die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve so modifizieren, daß der Grenzkreis zur Bruchkurve wird, wäre bei dem zugehörigen $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Spannungszustand jeder Bruchwinkel möglich, was aber gegen den 3.Satz der Bruchhypothese verstoßen würde. Deshalb wird man wohl nur dann an die Wegnahme des Totraums denken müssen, wenn die Experimente wider Erwarten keine Häufung der Bruchwinkelergebnisse bei 0° und etwa 50° zeigen sollten.

Es sei nochmals daran erinnert, daß Totraum keinen Einfluß auf die errechneten Spannungen beim Bruch nimmt, wohl aber auf den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ über dem Winkel θ , wie beispielsweise aus Bild 10.7 auf S. 182. hervorgeht.

Leider lassen sich Anstrengungen $\mathcal{E}(\theta) < 1$ nicht experimentell nachweisen, so daß für die hier angesprochenen Bereiche wohl auf Dauer einige Ungewißheiten hingenommen werden müssen.

Die dem Bild 10.7 zugrundeliegenden Parameter ($R_{\perp}^{(+)} = 60 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp\parallel} = 80 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(-)} = 180 \text{ N/mm}^2$; $p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0, 2$; $p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0, 3$; $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)} = 0, 189$) führen dazu, daß sich zwischen den beiden Maxima der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ bei $\theta_{fp} \approx \pm 50^\circ$ und $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$ nur ein ganz flacher Abfall zu einem lokalen Minimum ausbildet. Der Unterschied der "Anstrengungskurve" $\mathcal{E}(\theta)$ über θ gegenüber derjenigen, die entstehen würde, wenn man den toten Bereich entfernt, indem man den Grenzkreis zur Bruchkurve macht (die Bruchgefahr zwischen den Maxima bliebe dann konstant bei "1") ist in diesem Fall, wie aus Bild 10.7 ersichtlich, sehr gering.

Die im Abschnitt 10.5 angestellten Betrachtungen zu Fragen der Probabilistik sind nur als ein Nebenprodukt der Bruchwinkelsuche zu betrachten, durch die man sozusagen "gratis" einige Anhaltspunkte bekommt. Für eine solide Bearbeitung der probabilistischen Fragen sollten "professionellere" Methoden angewandt werden, wie sie z.B. in [75] angesprochen werden.

11 Offene Fragen

11.1 Anwendbarkeit für verschiedene Beanspruchungsarten

Eine weitverbreitete irrige Meinung ist die, daß Bruchbedingungen – wie auch die hier vorgestellten – nur auf monoton von "null" bis zum Bruch gesteigerte (sogenannte "zügige") Beanspruchung angewandt werden dürften. Wahrscheinlich rührt dieser Irrtum daher, daß die meisten Versuche zur Verifikation von Bruchbedingungen aus Gründen der Einfachheit sowie der Kosten- und Zeitersparnis mit kurzzeitiger, zügiger Belastung bis zum Bruch durchgeführt werden. Bruchbedingungen werden aber selten ausschließlich für nur eine Beanspruchungsart konzipiert, die Arbeit [57] dürfte in dieser Beziehung eine Ausnahme darstellen.

Bei den bisher gängigen Bruchbedingungen wurde nie der Anspruch erhoben, daß sie physikalisch begründet seien, sondern sie sollten nur dazu dienen, ein Interpolationspolynom durch einige experimentell ermittelte Stützpunkte zu legen. Dabei spielt die Beanspruchungsart keine Rolle. Selbstverständlich können die Versuchspunkte auch aus Versuchen mit langzeitiger ruhender oder schwingender Beanspruchung stammen [25,87]. Anders verhält es sich mit den in Kapitel 5 und 9 vorgestellten Bruchbedingungen. Sie basieren im wesentlichen auf der Mohrschen Festigkeitshypothese und es stellt sich somit die Frage, ob diese für alle Beanspruchungsarten gleichermaßen gilt. Es ist kaum zu erwarten, daß sich das Bruchverhalten der hier betrachteten spröd-brechenden Faserverbundstoffe mit der Beanspruchungsart gravierend ändert. Folglich bestehen auch keine Bedenken dagegen, die entsprechenden Bruchbedingungen nicht nur bei monoton gesteigerter Beanspruchung, sondern auch bei ruhender (statischer) und schwingender Langzeitbeanspruchung anzuwenden. Selbst wenn die physikalische Begründung in diesen Fällen noch angezweifelt werden kann, zum "curve fitting" eignen sich die angegebenen Formulierungen allemal recht gut. Vor allem sind sie insofern "werkstoffgerecht", als sie Zfb und Fb unterscheiden, was für alle Beanspruchungsarten richtig ist. Allerdings ist bei schwingender Beanspruchung zu erwarten, daß ein Zfb in einer Schicht den Fb in Nachbarschichten viel stärker durch Kerbwirkung stimuliert als bei zügiger und ruhender Beanspruchung.

Die neuen physikalisch fundierten Bruchbedingungen sind auch insofern angenehm, als man durch sie nicht zu einer aufwendigen Bestimmung von Festigkeitsparametern gezwun-

gen wird, die zwar zum curve fitting in die Bruchfunktion aufgenommen wurden, dort aber – physikalisch gesehen – überhaupt nicht hingehören. Ein Beispiel hierfür wird in der Arbeit [25] beschrieben, in der über Erfahrungen mit Bruchbedingungen bei schwellender Beanspruchung berichtet wird. Will man die Festigkeit einer UD-Schicht bei schwingender $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung berechnen, braucht man bei den neuen Bruchbedingungen eine Wöhler-Kurve für $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und eine Wöhler-Kurve für $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung. Bei Anwendung der *Tsai, Wu*- Bruchbedingung benötigt man aber zusätzlich noch die $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Wöhler-Kurve, obwohl $\sigma_{\perp}^{(+)}$ keinen Einfluß auf den Schwingbruch unter kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung hat.

Der wohl schwerwiegendste Mangel der vorgestellten "elementaren" Bruchanalyse ist der, daß sie die von Zfb-Rissen auf Nachbarschichten ausgeübte Kerbwirkung nicht erfaßt. Glücklicherweise wird diese durch die an der Reißspitze bei hoher Belastung bzw. großer Schwingenspielzahl auftretende Delamination etwas gemildert. Trotzdem sollte sie – insbesondere bei schwingender Beanspruchung – in ihrer Auswirkung auf $\sigma_{\parallel}^{(+)}$ -beanspruchte Schichten möglichst nicht vollständig unberücksichtigt bleiben. Wenn die schichtenweise Analyse beispielsweise zeigt, daß eine Schicht (z.B. eine 0° -Schicht), die für die Tragfähigkeit eines Laminats eine entscheidende Bedeutung hat, mit zwei nicht ganz dünnen Nachbarschichten (z.B. 90° -Schichten) in Berührung steht, in denen massive Ribbildung vom Modus A auftritt, dann ist es sicher nicht richtig, bei der "Lebensdauer-Berechnung" für das Laminat bei der 0° -Schicht mit Werten aus einer σ_{\parallel} -Wöhler-Kurve zu rechnen, die an einem ungekerbten UD-Probekörper ermittelt wurde. Falls aber nur eine solche vorliegt, sollte man deren Werte für die Anwendung auf eine Schicht im Laminat, die von ihren Nachbarschichten angekerbt wird, mit einem geschätzten Faktor < 1 erniedrigen. Je nach Schwere der Ankerbung könnte ein solcher Faktor etwa 0,8 bis 0,5 sein. So würde die Kerbwirkung jedenfalls näherungsweise berücksichtigt. Für das Schätzen eines solchen Abminderungsfaktors ist es natürlich günstig, die Ergebnisse einer realistischen Zfb-Rechnung für die Nachbarschichten mit den angegebenen Bruch-Modi und Überschreitungsgraden $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ nutzen zu können.

Trotz aller Fortschritte in der schichtenweisen Bruchanalyse von Laminaten wird von Schwingfestigkeits-Experten und Bruchmechanikern vielfach – z.B. in [88] – die Ansicht vertreten, daß die schichtenweise Bruchanalyse der Lamine für die Behandlung schwingender Beanspruchungen nicht anwendbar sei. Zweifellos ist es heute noch nicht möglich – nicht einmal für einen simplen Einstufenversuch – die zu erwartende Bruch-Schwingenspielzahl eines Laminats mit befriedigender Genauigkeit mit Hilfe einer schichtenweisen Bruchanalyse vorherzuberechnen. Darauf kommt es aber auch nicht in erster Linie an. Am wichtigsten ist es, daß man beim Entwurf eines Laminats für schwingende Beanspruchung mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse erkennt, welche Schichten besonders kerb- und damit ermüdunggefährdet sind, damit man durch "Umschichtung" oder Faserrichtungsänderungen

und möglicherweise Einbau von "Rißstopperschichten" schon beim Entwurf alles Erdenkliche tun kann, um ein möglichst schwingfestes Laminat zu erzielen. Auf diese Weise könnte man sich etliche kostspielige Schwingfestigkeitsversuche an Bauteilen ersparen!

Die Bruchanalyse bei schwingender Beanspruchung wird durch das "Weglaufen" von matrixdominierten Spannungen bei langdauernder Belastung erschwert. Bei der Schwingfestigkeitserprobung im Zuge der Entwicklung der schon mehrfach erwähnten Pkw-Drehfeder aus GFK haben sich einige grundsätzliche Erkenntnisse über das zweckmäßige Arbeiten mit Bruchbedingungen bei schwingender Beanspruchung ergeben [25]. Am Beginn der Entwicklung wurde die GFK-Drehfeder in einem Einstufenversuch mit einem zwischen den Werten 1700 Nm und 170 Nm pulsierenden Drehmoment belastet. Das Fasergerüst hielt die maximale und minimale Verdrehung der Feder etwa konstant, obwohl die Spannungen σ_2 (und τ_{21}) sich während der Versuchsdauer änderten. Die zwischen Oberspannung σ_{2_0} und Unterspannung σ_{2_u} pulsierende $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung der äußeren UD-Schicht veränderte sich im Laufe der Zeit so sehr, daß die anfangs negative Unterspannung bis in den positiven Bereich "weglief", also von einer Druckspannung zu einer Zugspannung wurde. So kam es bei den Versuchen zu den zunächst "unerklärlichen" Quer-Zugbrüchen nach Modus A. Erwartet wurden nur durch die Druck-Oberspannung verursachte Modus C-Brüche. Diese traten dann auch nur noch auf, nachdem das Drehmoment-Verhältnis von $(M_{t_u}/M_{t_o}) = 0,1$ auf 0,36 erhöht wurde, was den Betriebsbedingungen besser entsprach.

Es erscheint fast aussichtslos, das "Weglaufen" der matrixdominierten Spannungen bei schwingender Beanspruchung rechnerisch zu verfolgen. Deshalb wurde in [25] vorgeschlagen, sich folgendermaßen zu behelfen:

- Man benutzt als Festigkeitsparameter Schwingfestigkeiten $R_{\perp}^{(+)}(N), R_{\perp}^{(-)}(N), R_{\perp\parallel}(N)$, die nicht mit konstanter $\sigma_{\perp}^{(+)}$ - oder $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung bzw. $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung ermittelt werden, sondern aus Schwingfestigkeitsversuchen stammen, in denen die Verzerrung ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ während der ganzen Versuchsdauer konstant ist.
- Es werden weiterhin die mit den Spannungen σ_2, τ_{21} usw. formulierten Zfb-Bruchbedingungen benutzt.
- Als Spannungswerte für σ_2 und τ_{21} setzt man in die Zfb-Bruchbedingungen diejenigen ein, die sich mit den für den Belastungsbeginn, d.h. für die ersten Lastzyklen, geltenden Sekantenmoduln $E_{\perp s}$ bzw. $G_{\perp\parallel s}$ errechnen.
- Als Schwingfestigkeitswerte $R_{\perp}^{(+)}(N), R_{\perp}^{(-)}(N), R_{\perp\parallel}(N)$ setzt man in die Zfb-Bedingungen diejenigen Werte aus der mit konstanten Verzerrungen ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ aufgenommenen Wöhler-Kurve ein, die sich aus ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ mit den gleichen Sekantenmoduln errechnen, wie man sie auch zur Berechnung der Schichtspannungen des Laminats benutzt hat.

Auf diese Weise wird – so ist zu hoffen – das im Bauteil auftretende "Weglaufen" der Spannungen dadurch zumindest näherungsweise erfaßt, daß man bei der Ermittlung der Festigkeiten im Probekörper ein ähnliches "Weglaufen" zuläßt, statt die Spannung konstant zu halten. Täte man dies nicht, sondern benutzte wie üblich Festigkeitswerte aus Wöhler-Linien, die bei konstanter Spannung aufgenommen wurden, müßte man in Zeitintervallen rechnen, in denen man abschnittsweise die Moduln und damit die Spannungen konstant hält. Dazu würden schwingspielzahlabhängige Moduln und schließlich eine Schadens-Akkumulationshypothese benötigt, was alles zu einem kaum realisierbaren Aufwand führt.

Um mit der vorgeschlagenen Näherungsmethode die zu erwartende Schwingspielzahl bis zum Beginn der Zfb-Rißbildung bei einer Einstufen-Belastung abzuschätzen, muß man iterativ so lange zusammengehörige Werte $R_{\perp}^{(+)}(N)$, $R_{\perp}^{(-)}(N)$, $R_{\perp\parallel}(N)$, d.h. solche, die sämtlich zu einer gleichen Bruch-Schwingspielzahl N gehören, in die Bruchbedingung einsetzen, bis diese erfüllt ist, d.h. die Bruchfunktion den Wert 1 annimmt. Diejenige Bruch-Schwingspielzahl N_B der Festigkeitswerte, mit denen die Bruchbedingung schließlich erfüllt wird, ist dann die zu erwartende Schwingspielzahl bis zum Einsetzen der Zfb-Rißbildung der betrachteten Schicht im Laminat.

Bei der Benutzung der Fb-Bedingungen zur Abschätzung der Lebensdauer (Bruch-Schwingspielzahl) des Laminats wird in konventioneller Weise verfahren, indem $R_{\parallel}(N)$ -Werte einer bei konstanter Spannung σ_{\parallel} ermittelten Wöhler-Linie benutzt werden.

Manche der hier angestellten Betrachtungen können sinngemäß auf langdauernde ruhende (statische) Beanspruchungen übertragen werden [25].

Obwohl also zur Anwendung der Bruchbedingungen auf verschiedene Beanspruchungsarten schon Vorarbeit geleistet worden ist, sind auf diesem weiten Feld doch noch viele Fragen offen.

Eine Beanspruchungsart, die vollkommen außerhalb der Reichweite der in diesem Buch behandelten Methode der schichtenweisen Bruchanalyse liegt, ist die Stoß- oder Schlagbeanspruchung (Impact). Gerade gegenüber dieser Beanspruchungsart sind die Faserverbund-Lamine außerordentlich empfindlich. Dies stellt oft eines der größten Hemmnisse für ihren Einsatz in Bauteilen dar, bei denen solche Beanspruchungen nicht auszuschließen sind; man denke z.B. an Steinschlag bei Autos oder bei Flugzeugen während Start und Landung auf unbefestigten Pisten. Obwohl auch bei Impact-Beanspruchung Zwischenfaserbrüche eine große Rolle spielen, kann nicht erwartet werden, daß allein mit den hier beschriebenen Methoden das Bruchgeschehen angemessen erfaßt werden könnte. Die Unzulänglichkeit beginnt bereits bei der Spannungsanalyse; denn bei hohen Auftreffgeschwindigkeiten spielen bereits die Ausbreitung und Reflexion der Stoßwellen eine Rolle. Auch die Stoffgesetze bei extrem hohen Deformationsgeschwindigkeiten sind natürlich gegenüber der Situation bei zügiger oder schwingender Belastung sehr verändert. In einem hohen Maße bilden sich Schlagschäden in

Form von Delaminationen aus, für die – wie schon mehrfach erwähnt – die hier vorgestellten Bruchanalysemethoden nur sehr begrenzt brauchbar sind. Diese können deshalb allenfalls in einer untergeordneten Funktion in ein aufwendigeres Modell für die Schlagschadensanalyse mit eingebunden werden. Vermutlich werden bruchmechanische Ansätze auf diesem Gebiet – insbesondere zur Beschreibung der Delaminationsvorgänge – eine überragende Bedeutung erlangen.

11.2 Einige ungeklärte Fragen

Im folgenden sollen einige wichtige, aber unbefriedigend gelöste Probleme und ungeklärte Fragen unter entsprechenden Schlüsselworten zumindest einmal kurz angesprochen werden.

Nichtlinearität und Verzerrungs-Interaktionen

Die starken Krümmungen der $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \varepsilon_{\perp})$ -Diagramme und $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$ -Diagramme zeigen sich nur bei der Erstbelastung, s. Bild 1.3 auf S. 5. Bei der anschließenden Entlastung führt die Entlastungslinie vom Endpunkt der Erstbelastung nahezu geradlinig in den Belastungs-Nullpunkt zurück, wenn man einmal von einer meist auftretenden kleinen bleibenden Dehnung bzw. Schubverformung absieht. Die Zweitbelastungs-Linie fällt dann ungefähr mit der Entlastungslinie des ersten Zyklus zusammen. Bei mehrfacher Belastung bis zur stets gleichen Höchstlast spielt die hier angesprochene Nichtlinearität also keine nennenswerte Rolle mehr. Von dort her betrachtet, wird das Problem der Nichtlinearität bei mehrfacher Belastung etwas differenzierter zu betrachten sein, als in dieser Arbeit geschehen.

Wichtiger – aber auf jeden Fall schwieriger zu berücksichtigen – ist u.U. der in den Bildern 3.3 und 3.4 auf S. 35 und 36 zum Ausdruck kommende Befund, daß sich die Spannungen σ_2 und τ_{21} gegenseitig beim Verformungsverhalten beeinflussen, wenn sie kombiniert auftreten. Vermutlich ist aber auch dies nur bei der Erstbelastung so ausgeprägt der Fall, denn nur bei dieser treten die für die gegenseitige Beeinflussung ursächlichen Mikroschädigungen auf. Die aufgeworfenen Fragen sollten bald geklärt werden, weil augenblicklich noch eine gewisse Unsicherheit bei der Wahl der Moduln für die Spannungs- und Bruchanalyse besteht.

Das "dünne Schicht"- und "in situ"-Problem

Um den Rahmen dieses Buches nicht zu sprengen, wurde nur am Rande auf die Frage der Ermittlung der Festigkeitsparameter eingegangen, die in den Bruchbedingungen erscheinen. Es wurde im allgemeinen vorausgesetzt, daß diese an UD-Probekörpern ermittelt werden. Dagegen gibt es aber ernst zu nehmende Einwände. Es ist seit langem bekannt [89], daß die Ribbildung in Laminaten – insbesondere in dünnen Schichten – durch die richtungsabhängige Steifigkeit der Nachbarschichten nicht unerheblich beeinflußt wird. Peters [90] erklärt dies anschaulich mit dem Vorhandensein einer gewissen konstanten Eindringtiefe einer die Riböffnung behindernden Wirkung durch die Nachbarschichten, die sich um so stärker auswirkt,

je kleiner das Verhältnis der Dicke der Schicht zur Eindringtiefe ist. Auch der Größeneinfluß (size effect, Weibull-Effekt) mag eine gewisse Rolle spielen [17]. Die Behinderung der Rißöffnung dürfte im übrigen am stärksten sein, wenn die Fasern der Nachbarschicht mit der Faserrichtung der rißgefährdeten Schicht einen Winkel von 90° bilden, so daß die größtmögliche Steifigkeit der Nachbarschicht der Rißöffnung entgegenwirkt. Inzwischen gibt es für ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat eine Theorie [68] (dort Seite 219), die einen Dickeneinfluß qualitativ richtig erfaßt, für die Konstruktionstechnik aber nicht ohne weiteres benutzbar ist.

Als seinerzeit die hier angesprochenen Probleme publik wurden, war man mancherorts eine Zeitlang geneigt, die Methoden der schichtenweisen Bruchanalyse als einen gescheiterten Versuch zu betrachten und sie ad acta zu legen. Wenn nämlich die Festigkeitsparameter in den Bruchbedingungen, mit denen man z.B. einen Laminataufbau optimieren will, selbst in gravierender Weise vom Laminataufbau abhängen, wäre das Modell in der Tat unbrauchbar. So schwerwiegend sind die Einflüsse allerdings nicht, daß man das Modell als Ganzes verwerfen müßte, aber es besteht aller Grund, die Bedenken ernst zu nehmen und nach Abhilfe zu suchen. Die nächstliegende Maßnahme könnte darin bestehen, die Festigkeitsparameter nicht an UD-Probekörpern, sondern an speziell zu diesem Zweck konzipierten Prüflaminaten zu ermitteln. Dabei handelt man sich aber sogleich die Unannehmlichkeit ein, daß man nun den Spannungszustand beim Bruch in der Prüfschicht mit einer schichtenweisen, nicht-linearen Spannungsanalyse berechnen muß, wobei sich neue Fehlerquellen einstellen. Die hier anstehenden Fragen können nur in einer sehr engen Kooperation von Vertretern der Damage Mechanics, der Konstruktionstechnik und Prüftechnik befriedigend gelöst werden.

"Menschliche" und organisatorische Probleme

Auch auf der menschlichen Seite der Forschungs- und Entwicklungstätigkeit gibt es offene Fragen und ungelöste Probleme. Wie in vielen Lebensbereichen so sind auch bei der Ingenieurstätigkeit oft gerade die menschlichen und organisatorischen Probleme die größeren Hemmnisse. Die Faserverbundtechnik hätte sich vermutlich wesentlich besser entwickeln können, wenn es mehr Kommunikation und auch Kooperation unter den Vertretern der verschiedenen durch die Faserverbundtechnologie angesprochenen Fachdisziplinen gegeben hätte. Konstrukteure sind meistens nicht sehr kommunikationsfreudig. Ein Grund hierfür dürfte die Tatsache sein, daß sie wegen ihres "Alltagsgeschäfts" nicht jederzeit über die neuesten Erkenntnisse der Wissenschaft im Bilde sein können. Sie zeigen deshalb häufig eine gewisse Scheu vor Fachgesprächen mit "Wissenschaftlern", insbesondere mit solchen, die in der Grundlagenforschung tätig sind. Vielfach tragen Wissenschaftler ungewollt zu dieser Abneigung bei, indem sie ingenieurmäßige Ausführungen – wie beispielsweise diejenigen in diesem Buch – als "unwissenschaftlich" einstufen. Dem könnten die Konstrukteure aber mit dem Hinweis begegnen, daß man nicht warten kann, bis die Wissenschaft sich endlich auch

der Probleme annimmt, mit denen die Konstruktion tagtäglich zu kämpfen hat. Das Bauteil muß hier und heute entwickelt werden und nicht erst in fünf oder zehn Jahren, und zwar so gut wie möglich (und nötig) unter den gegebenen Rahmenbedingungen und nicht mit dem Anspruch höchster wissenschaftlicher Korrektheit. Auf der Basis dieses Bewußtseins sollten Konstrukteure aber für den wissenschaftlichen Fortschritt höchst aufgeschlossen sein und jede Gesprächsmöglichkeit nutzen, allein schon deshalb, damit "die Wissenschaft" sich ihrer dringlichen Probleme annimmt.

Zum Schluß noch ein praktischer Rat: Man sollte fortan kein anspruchsvolles Faserverbundbauteil, bei dem die "Festigkeit" eine entscheidende Rolle spielt, mehr entwickeln, ohne in allen Entwicklungs-Etappen eine zeitgemäße, mit einem vernünftigen Aufwand/Nutzen-Verhältnis konzipierte, Bruchanalyse durchzuführen. Bei den heute selbstverständlich immer noch unverzichtbaren Belastungs- und Bruchversuchen am Prototyp-Bauteil sollte man dann auch den Prüfaufwand – mit den damit verbundenen Kosten – nicht scheuen, der nötig ist, um zu erfahren, wo die Theorie richtige Vorhersagen gemacht hat, und wo möglicherweise "Korrekturfaktoren" angebracht werden müssen. Nach der Einarbeitung dieses auf die eigenen Belange abgestimmten Erfahrungsschatzes wird die schichtenweise Bruchanalyse zu einem hervorragenden Instrument, das Entwicklungszeit und -kosten sparen hilft.

Die hier angeratene innige Verquickung von "Berechnung" und "Prüfung" setzt allerdings auch eine enge Vernetzung dieser beiden Bereiche im Unternehmen voraus. Die in Großunternehmen meist anzutreffende personelle und gar räumliche Trennung des Prüfbereichs vom Berechnungsbereich ist für ihr enges Zusammenwirken oft sehr erschwerend.

11.3 Versuch einer Prioritätensetzung

Die bisherigen Ausführungen sollten bereits deutlich gemacht haben, daß es in der Festigkeitsanalyse der Faser-Matrix-Lamine nicht nur einige "blinde Flecken", sondern große unerforschte Gebiete gibt. Das bisher zur Verfügung stehende Know-how macht einen sehr inhomogenen und unausgewogenen Eindruck. Einerseits existieren für manche Probleme bereits sehr verfeinerte Modelle, andererseits sind aber noch etliche Voraussetzungen, die von grundlegender Bedeutung sind, bei weitem nicht hinreichend geklärt. Für die Forschung kann es deshalb – aus der Sicht des Autors – vorerst nicht um weitere Verfeinerungen der Modelle gehen, sondern mit höchster Priorität müßten zunächst deren elementare Grundlagen gesichert werden. Aus dieser Sicht fällt es nicht schwer, eine Prioritäten-Liste zu erstellen. Das Buch befaßt sich sehr eingehend mit der Zwischenfaserbruch-Problematik. Dafür gibt es gute Gründe; diese Frage war in der Vergangenheit zu sehr vernachlässigt worden und die angebotenen Lösungen wurden oft der Realität nicht gerecht. Auch spielen die Zwischenfaserbrüche beim Bruchgeschehen eine weit wichtigere Rolle als landläufig angenommen wird.

Die entscheidende Voraussetzung der Zf-Bruchanalyse ist die, daß sich eine Schicht in einem Laminat genau so verhält wie die isoliert untersuchte Einzelschicht. Dies wird durch den "dünne Schicht"- und "in situ"-Effekt in Frage gestellt. Deshalb muß mit hoher Dringlichkeit dieser Problemkreis abgeklärt werden. Dabei wird es – wie eingehend erörtert wurde – unumgänglich sein, die Zfb-Versuche mit einer sehr verfeinerten, nicht-linearen Spannungsanalyse auszuwerten.

Die in diesem Buch in den Vordergrund gerückte Diskussion der Zwischenfaserbruch-Problemik darf nicht den Blick dafür verstellen, daß die Tragfähigkeit eines gut konzipierten Laminats vom Faserbruch bestimmt wird. Auch hier gibt es noch eine gravierende Unsicherheit bei der Voraussetzung der Bruchhypothese der maximalen Faser-Längsspannung, wie bei der Diskussion der Bruchbedingungen für Faserbruch auf S. 75 ausgeführt wurde. *Hart-Smith* weist in [28] und vielen weiteren Arbeiten darauf hin, daß eine Abhängigkeit der ertragbaren Faser-Längsspannung von der Querbeanspruchung der Faser auftritt. Dies ist schwer zu erklären. Man kann auch nicht ausschließen, daß die vermeintliche Abhängigkeit auf unzulängliche Versuchstechniken zurückzuführen ist [91]. Behauptet wird, daß an einem ausgeglichenen ($0^\circ, 90^\circ$)-Laminat bei einer Beanspruchung, die zu dem Betrage nach gleich hohen Dehnungen mit entgegengesetzten Vorzeichen in den beiden Faserrichtungen führt, nur eine etwa halb so hohe Faser-Längsspannung verwirklicht werden könne wie bei einachsiger Beanspruchung in einer Faserrichtung. Weil diese Frage z.B. für die Belastbarkeit von Torsionsrohren aller Art von höchster Bedeutung ist, sollte sie dringend geklärt werden. Verlässliche Ergebnisse sind aber nur zu erreichen, wenn die zu vergleichenden Spannungszustände an gleichen Probekörpern realisiert werden, z.B. an rohrförmigen Probekörpern. An einem $\pm 45^\circ$ -Rohr läßt sich im Torsionsversuch der Schubspannungszustand realisieren, bei dem die Dehnungen der $+45^\circ$ - und -45° -Richtung dem Betrage nach gleich groß sind aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Mit dem gleichen Probekörper läßt sich aber auch der korrespondierende Zugversuch verwirklichen, indem gleichzeitig Axial-, Umfangs- und Torsionsspannung erzeugt wird, wobei alle drei dem Betrage nach gleich groß sein müssen, damit aus ihnen eine einachsige Beanspruchung in einer Faserrichtung resultiert. Erst wenn die hier angesprochenen Grundvoraussetzungen der Fb- und Zfb-Analyse gesichert erscheinen oder die anzustellenden Untersuchungen zu einer vielleicht nötigen Modifikation geführt haben, erscheint eine Weiterentwicklung der Fb-Modelle sinnvoll.

Dringlich sind auch die Untersuchungen zum Zfb im Bereich, in dem sowohl $\sigma_2 < 0$ als auch $\sigma_3 < 0$ ist (vgl. S. 169). Ebenfalls muß noch gründlicher als bisher [64] geklärt werden, wie sich solche Spannungszustände auf die faserparallele Druckfestigkeit auswirken.

Schließlich muß noch an die Probleme des σ_1 -Einflusses auf den Zwischenfaserbruch und an die mit der Verspannung von Faser und Matrix zusammenhängenden Fragen erinnert werden (vgl. S. 67, 68).

12 Zukunftsaussichten

Offenbar wird der in Teil I und II geschilderte Stand der Bruchanalyse, obwohl die Grundlagen schon vor Jahrzehnten publiziert wurden, bisher nur an wenigen Stellen bei der Entwicklung von Faserverbundbauteilen genutzt, so daß es nicht gerechtfertigt ist, ihn als "Stand der Technik" zu bezeichnen. Der Hauptgrund hierfür dürfte darin bestehen, daß die vorgestellten Methoden und Modelle bisher nicht in kommerzielle Software umgesetzt wurden. An einigen Universitäten und Forschungs-Instituten werden aber Bruchanalyse-Programme benutzt, die den hier entwickelten Vorstellungen sehr nahekommen [83,92].

Es besteht nicht der geringste Zweifel daran, daß die neuen Modelle nur dann eine Chance haben, eine weitverbreitete Anwendung zu finden, wenn sie in kommerzielle Rechenprogramme implementiert werden. Deshalb ist zu hoffen, daß die Ergebnisse der angelaufenen Versuche zur Verifikation der neuen Modelle so überzeugend ausfallen werden, daß genügend Motivation für in Betracht kommende Softwarehäuser zu einer Neubearbeitung ihrer Composite-Analyse-Programme entsteht. Sicherlich darf man sich aber im Hinblick auf die Marktsituation im Faserverbundbereich keinen übertriebenen Erwartungen hingeben. Deshalb wird wohl der eine oder andere Anwender, für den die Nutzung der neuen Methoden wichtig ist, doch zur Selbsthilfe schreiten und – jedenfalls fürs erste – eigene Rechenprozeduren in bestehenden Programmen einbinden müssen, was aber auch nicht auf besonders große Schwierigkeiten stoßen dürfte.

Die bisher im Rahmen der Überprüfung der Modellvorstellungen durchgeführten Experimente an UD-GFK [15,16,84] zur Bestimmung von Bruchspannungen und Bruchwinkeln stehen weitgehend mit den Modell-Vorhersagen in Einklang. Die meisten der geplanten, z.T. außerordentlich schwierigen Experimente befinden sich aber noch in der Entwicklungsphase. Eine vollständige experimentelle Überprüfung eines Bruchkriteriums ist praktisch gar nicht durchführbar. Die Versuche werden im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum ausgeführt, wobei mehrere Spannungszustände zu ein und demselben Bruchpunkt auf der $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchfläche führen können; es dürfte deshalb nur eine relativ "dünne" experimentelle Belegung der Master-Bruchfläche möglich sein. Andererseits sind die neuen Ansätze aber derartig physikalisch plausibel, daß eine in einigen wesentlichen Punkten brauchbare Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie in den Bruchspannungen und vor allem den Bruchwinkeln bereits ein hohes Maß an Vertrauen in die neue Methode rechtfertigen würde.

Die Aufbereitung der neuen Zfb-Analyse für FEM-Programme wird eine der wichtigsten Aufgaben bei der weiteren Entwicklungsarbeit sein müssen. Bei einer FEM-Spannungs- und -Bruchanalyse wird es normalerweise viele Elemente geben, in denen die Anstrengung sehr niedrig ist, so daß weder eine genaue Angabe der Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ noch eine Aussage über den zu erwartenden Bruchwinkel θ_{fp} interessiert. Deshalb stellt sich grundsätzlich die Frage, ob sich nicht eine "stufenweise Verfeinerung" der Rechnung empfehlen würde. Eine solche könnte darin bestehen, daß man die Berechnung mit einer als konventionelles Polynom angesetzten Bruchfunktion $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ beginnt, die eine grobe Approximation des mit Hilfe der $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchfläche ermittelten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Bruchkörpers darstellt. Wenn sich dann bei der Rechnung eine Anstrengung $\mathcal{E} \geq 0,6$ bis $0,8$ ergibt, könnte man auf das Rechnen mit der Master-Bruchfläche "umschalten".

Möglicherweise werden aber diese und andere Überlegungen zur Reduzierung von Rechenzeiten wie das auf S. 166 erwähnte "elektronische Album" bald gegenstandslos, wenn die Ausstattung der Konstruktions- und Entwicklungsabteilungen mit Rechenkapazität weiter so fortschreitet wie gegenwärtig. Ähnliches mag für einen Vorschlag von *Cuntze* [93] gelten, der von der Vorstellung ausgeht, daß man Teil-Bruchflächen, die einem bestimmten Bruch-Modus zugeordnet sind, mit Invarianten der Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ approximieren könnte, um sich die Bruchwinkelsuche zu ersparen. Es ist aber schwer vorstellbar, daß es möglich sein sollte, im allgemeinen Fall des fünfdimensionalen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustands ohne die Anwendung eines Rechenprogramms wie *Brukan* [77] herauszufinden, welcher Bruch-Modus beim betrachteten Spannungszustand auftreten wird. Dies ist aber die Voraussetzung dafür, daß man den jeweils passenden Invariantensatz zur Anwendung bringen kann.

Das Hauptanwendungsgebiet der neuen Methode wird sicherlich vorerst bei den Faserverbundwerkstoffen mit Polymermatrix liegen, weil zum einen diese bisher die größte technisch/wirtschaftliche Bedeutung erlangt haben und zum anderen die neue Methode auch zunächst ein wenig für diese Stoffklasse "maßgeschneidert" wurde. Man wird sorgfältig prüfen müssen, inwieweit sie auch für andere sich spröde verhaltende Verbunde geeignet ist. Wenn man beispielsweise an faserverstärkte Keramik mit einer extrem niedrigen Zugfestigkeit der Matrix denkt, ist vorhersehbar, daß der Einfluß der faserparallelen Spannung erhöhte Beachtung verlangen wird.

Grundsätzlich ist zu erwarten, daß die neue Bruchanalyse-Methode große praktische Bedeutung erlangen wird, weil sie erstmalig physikalisch plausible Spannungswerte beim Bruch – auch bei räumlichen Spannungszuständen – liefert, und darüber hinaus für die Bruchfolgenabschätzung sehr wichtige Zusatzinformationen bietet. Mit dem zu erwartenden Fortschritt in der Numerik und bei der vermehrt verfügbaren Rechenkapazität wird auch der heute möglicherweise noch etwas "abschreckende" Rechenaufwand für die Bruchwinkelsuche bald

bedeutungslos werden, zumal bei 2D-Beanspruchung – wie im Teil II gezeigt wurde – von einem nennenswerten zusätzlichen Rechenaufwand überhaupt keine Rede sein kann.

Längerfristig gesehen wird man anstreben, das Schädigungs- und Bruchverhalten von Laminaten nicht nur für einfache Beanspruchungszustände wie zügige Belastung bis zum Bruch oder schwingende Belastung mit konstanter Ober- und Unterspannung zu behandeln, sondern dieses auch bei einer komplizierten Belastungsgeschichte vorhersagen zu können, beispielsweise auch bei mehreren nacheinander auftretenden unterschiedlichen Lastfällen. In einer so erweiterten Festigkeitsanalyse werden die in diesem Buch behandelten Vorstellungen und Modelle sicher ein wichtiger Baustein sein, aber wesentliche andere Elemente müssen hinzutreten. Beispielsweise wird dann eine Art "Registrier- und Speicherwerk" benötigt, mit dem die im Laufe der Belastungsgeschichte eingetretenen Schädigungen und Brüche, z.B. Zf-Risse, festgehalten werden.

Soll das anspruchsvolle und schwierige Unterfangen gelingen, das Verhalten von Faser-Matrix-Laminaten, angefangen bei der Mikromechanik [94] bis hin zum Schädigungs- und Bruchverhalten ganzer Bauteile "berechenbar" zu machen, so bedarf es zweifellos einer intensiven Bündelung von Know-how aus der Schädigungs- und Schadensmechanik, der Bruchmechanik und der in diesem Buch dargestellten ingenieurmäßigen Methoden sowie einer engen Kooperation mit der Werkstoffkunde und Prüftechnik.

13 Anhang

13.1 Literaturverzeichnis

- [1] Puck, A.; Schneider, W.: *On Failure Mechanisms and Failure Criteria of Filament-wound Glass-Fibre/Resin Composites*. Plast Polym. (Febr. 1969), S. 33-43
- [2] Puck, A.: *Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung*. Kunststoffe 59 (1969) 11, S. 780-787
- [3] Hashin, Z.: *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*. J. Appl. Mech. 47 (1980), S. 329-334
- [4] Hart-Smith, L. J.: *The Role of Biaxial Stresses in Discriminating between Meaningfull and Illusory Composite Failure Theories*. Composite Structures 25 (1993), S. 3-20
- [5] Tsai, S. W.: *Theory of Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1992
- [6] Puck, A.: *Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoff-Verbunde*. Kunststoffe 82 (1992) 2, S. 149-155
- [7] Nahas, M. N.: *Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fibre-Reinforced Composites*. J. Comp. Techn. & Res. Vol. 8 (1986) 4, S. 138-153
- [8] N. N.: *ESA Structural Materials Handbook*, Vol. 1, Polymer Composites, Section III Design Calculation Methods, Chapt. 11 - Strength Prediction & Failure Criteria
- [9] Rohwer, K.: *Computational Models for Laminated Composites* Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 17 (1993), S. 323-330
- [10] Christensen, R. M.: *Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Materials*. J. Comp. Mat. 22 (1988) 9, S. 874-897
- [11] Puck, A.: *Ein Bruchkriterium gibt die Richtung an*. Kunststoffe 82 (1992) 7, S. 607-610

- [12] Michaeli, W.; Huybrechts, D.: *A New Approach for the Dimensioning of Thick Laminates using Physically Based Strength Criteria*. Proc. 39. Conf. SAMPE 1994 Anaheim, CA, USA Vol. 2, S. 2829-2840
- [13] Michaeli, W.; Huybrechts, D.: *A new Approach for the Dimensioning of Thick Laminates*. Int. Mech. Eng. Congr. (IMECE) of ASME. Nov. 1994 Chicago, IL, USA, Proc. MD Vol. 49, S. 307-319
- [14] Cuntze, R. G.: *Evaluation and Application of a New Physically Based 2D/3D Inter-Fibre-Fracture (IFF) Strength Criterion*. Proc. Internat. Symp. Advanced Materials for Lightweight Structures, ESTEC, Noordwijk 1994, ESA-WPP-070, S. 133-139
- [15] Huybrechts, D.; Michaeli, W.: *Dimensioning of "Thick" Laminates*. 16. Conf. of the Europ. Chap. of the Soc. for the Advancement of Mat. and Proc. Engen. (SAMPE); 30. Mai - 1. Juni 1995, Salzburg, Proc., S. 211-222
- [16] Kroll, L.; Hufenbach, W.: *New Proof of Laminate Design by a Physically Based Failure Criterion*. Proceedings of ICCM-10, Whistler (Kanada) 1995 Vol. 1, S. 715-722
- [17] Talreja, R. (Hrsg.): *Damage Mechanics of Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam / London / New York / Tokyo 1994
- [18] Puck, A.: *Neue Hochleistungs-GFK-Bauteile – Drehstabfedern, Stabilisatoren, und drehelastische Wellen*. Vortrag 22. AVK-Tagung, Mainz 1989, S. 5.1-5.10
- [19] Puck, A.: *Entwicklung von GFK-Drehrohrfedern*. Ing. Werkst. 3 (1991) 4, S. 66 und 69-71 sowie 6, S. 66-67
- [20] Puck, A.: *GFK-Drehrohrfedern sollen höchstbeanspruchte Stahlfedern substituieren*. Kunststoffe 80 (1990) 12, S. 1380-1384
- [21] Michaeli, W.; Wegener, M.: *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe*. Hanser, München / Wien 1990
- [22] Ehrenstein, G. W.: *Faserverbundkunststoffe*. Hanser, München / Wien 1992
- [23] Raju, I. S.; Foye, R. L.; Avva, V. S.: *"A Review of the Analytical Methods for Fabric and Textile Composites"*. Proceedings of the Indo-U.S. Workshop on Composites for Aerospace Application, Part I, July 1990, Bangalore, S. 129-159
- [24] Puck, A.; Schürmann, H.: *Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern*. Kunststoffe 72 (1982) 9, S. 554-561

- [25] Garbe, J.; Puck, A.: *Erfahrungen mit Bruchkriterien an schwellend belasteten GFK-Drehfedern*. Kunststoffe 83 (1993) 5, S. 406-411
- [26] Hochbein, H.: *Bericht zum Entwicklungsprojekt "Lkw-Stabilisator aus GFK"*. Universität Gh Kassel / Böhler AG, Düsseldorf, 1989 (unveröffentlicht)
- [27] Schreiber, W.: *Zur Gestaltung und Dimensionierung von Antriebswellen aus Faser-Kunststoff-Verbunden*. Diss. Univ. Gh Kassel 1988; Fortschr.-Ber. VDI R.1 Nr. 184, VDI-Verlag, Düsseldorf 1990
- [28] Hart-Smith, L. J.: *Fibrous Composite Failure Criteria – Fact and Fantasy*. 7. Int. Conf. on Comp. Structures, Paisley, UK, July 1993. Mc Donnell Douglas MDC 93 K 0047
- [29] Hull, D.: *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press, Cambridge / London / New York 1981
- [30] Ewius, P. D.; Ham, A. C.: *The Nature of Compressive Failure in Unidirectional Carbon Fibre Reinforced Plastics*. AIAA/ASME/SAE 15. Structures, Structural Dynamics and Materials Conf., Las Vegas, USA, April 1974, S. 1-11
- [31] Michaeli, W.; Huybrechts, D.; Wegener, M.: *Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen*. Hanser, München / Wien 1995
- [32] Ikegami, K.; Nose, Y.; Yasunaga, T.; Shiratori, E.: *Failure Criterion of Angle Ply Laminates of Fibre Reinforced Plastics and Application to Optimise the Strength*. Fibre Science and Technology 16 (1982), S. 175-190
- [33] Tsai, S. W.: *Theory of Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1992, S. 9.5-9.6
- [34] Prinz, R.; Gädke, M.: *Characterization of Interlaminar Mode I and Mode II Fracture in CFRP Laminates*. Proc. Intern. Conf. "Spacecraft Structures and Mechanical Testing" Noordwijk, April 1991, S. 97-102
- [35] N. N.: VDI-Richtlinie 2014: *Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund*, Blatt 3. Beuth-Verlag, Berlin, erscheint demnächst
- [36] Vinson, J. R.; Sierakowski, R. L.: *The Behavior of Composite Materials*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht / Bosten / Lancaster 1986
- [37] Tsai, S. W.: *Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1988
- [38] Moser, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1992

- [39] Puck, A.: *Einführung in das Gestalten und Dimensionieren* in: Ehrenstein, G. W. und Martin, H.-D. (Hrsg.): *Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen*. Beiheft zur Zeitschrift *Kunststoff-Berater*, Umschau-Verlag, Frankfurt a. M. 1969, S. 44-66
- [40] Rüegg, Ch.: *Kardanwellen in CFK- und Hybridbauweise* in: *Verarbeiten und Anwenden kohlenstoffaserverstärkter Kunststoffe*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1981
- [41] Schürmann, H.: *Zur Erhöhung der Belastbarkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden durch gezielt eingebrachte Eigenspannungen*. Diss. Univ. Gh Kassel 1986; Fortschr.-Ber. VDI R.1 Nr. 170, VDI-Verlag, Düsseldorf 1989
- [42] Puck, A.: *Faser-Kunststoff-Verbunde mit Dehnungs- oder Spannungs-Kriterien auslegen?* *Kunststoffe* 82 (1992) 5, S. 431-434
- [43] Moser, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1992, S. 314-319
- [44] Jakobi, R.: *Zur Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse an dickwandigen, rohrförmigen Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden*. Diss. Univ. Gh Kassel 1987; Fortschr.-Ber. VDI R.5 Nr. 126, VDI-Verlag Düsseldorf 1987
- [45] Jakobi, R.; Puck, A.: *Zur Konstruktion und Berechnung von röhrenförmigen Faserverbund-Biegeträgern*. Vortrag, 18. AVK-Tagung, Freudenstadt 1982, S. 10.1-10.10
- [46] Herakovich, C. T.: *On the Relationship between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials*. *J. Comp. Mat.* Vol. 15 (1981), S. 336-348
- [47] Herakovich, C. T.: *Free Edge Effects in Laminated Composites* in: Rabotnov, Y. u. N. (Hrsg.): *Handbook of Composites, Volume 2. Structures and Design*. North-Holland, Amsterdam / New York / Oxford / Tokyo 1992, S. 187-230
- [48] Kim, R. Y.; Soni, S. R.: *Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites*. *J. Comp. Mat.* Vol. 18 (1984), S. 70-80
- [49] Soni, S. R.; Kim, R. Y.: *Delamination of Composite Laminates Stimulated by Interlaminar Shear*. *Comp. Mat.: Testing and Design (7. Conf.) ASTM STP 893*. J. M. Whitney, Ed., ASTM, Philadelphia 1986, S. 286-307
- [50] Kress, G.: *Free Edge Influence on CFRP-Laminate Strength*. *Int. J. Damage Mech.* Vol. 3, April 1994, S. 192-211
- [51] Kothe, E.: *Kombinierte Beanspruchungen* in: Knauer, B.; Wende, A. (Hrsg.): *Konstruktionstechnik*. Akademie-Verlag, Berlin 1988, S. 447-481

- [52] Hoffmann, O.: *The Brittle Strength of Orthotropic Materials*. J. Comp. Mat. Vol. 1 (1967), S. 200-206
- [53] Reddy, Y. S.; Reddy, J. N.: *Three-Dimensional Finite Element Progressive Failure Analysis of Composite Laminates under Axial Extension*. J. of Comp. Techn. & Res. 15 (1993), S. 73-87
- [54] Mohr, O.: *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Z. d. VDI 24 (1900) 45, S. 1524-1530 u. 46, S. 1572-1577
- [55] Jeltsch-Fricke, R.: *Bruchbedingungen vom Mohrschen Typ für transversal isotrope Werkstoffe am Beispiel der Faser-Kunststoff-Verbunde*. Kasseler Schriften zur Angewandten Mathematik . Preprint Nr. 1 (2) 1995, Univ. Gh Kassel
- [56] Stowell, E. Z.; Lin, T. S.: *On the Mechanical Behavior of Fibre-Reinforced Crystalline Materials*. J. Mech. Phys. Solids 9 (1961), S.242-260
- [57] Hashin, Z.; Rotem, A.: *A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials*. J. Comp. Mat. 7 (1973), S. 448-464
- [58] Azzi, V. D.; Tsai, S. W.: *Anisotropic Strength of Composites*. Experimental Mechanics, Sept. 1965, S. 283-288
- [59] Gol'denblat, I. I.; Kopnov, V. A.: *Strength of Glass-Reinforced Plastics in the Complex Stress State*. Mekhanika Polimerov 1 (1965) 2, S. 70-78
- [60] Zacharov, K. V.: *Strength of Laminated Plastics*. Plastische Massen (6, 1963), S. 48-51
- [61] Tsai, S. W.; Wu, E. M.: *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*. J. Comp. Mat. 5 (1971) 1, S. 58-80
- [62] Menges, G.: *Erleichtertes Verständnis des Werkstoffverhaltens bei verformungsbezogener Betrachtungsweise*. Fortschr.-Ber. d. VDI-Z R.5 Nr. 12, VDI-Verlag, Düsseldorf 1971
- [63] Knaust, U.: *Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund- Leichtbauteilen*. Diss. Univ. Gh Kassel 1988; Fortschr.-Ber. VDI R.20 Nr. 11, VDI- Verlag, Düsseldorf 1989
- [64] Edge, E. C.: *Does Transverse and Shear Loading affect the Compression Strength of Unidirectional CFC?* Composites 25 (1994) 2, S. 159-161
- [65] Puck, A.: *Progress in Composites Component Design by Advanced Failure Models* 17. Conf. of the Europ. Chap. of the Soc. for the Advancement of Mat. and Proc. Engen. (SAMPE); 28.-30. Mai 1996, Basel, (In Vorbereitung)

- [66] Choo, V. K. S.: *Effect of Loading Path on the Failure of Fibre Reinforced Composite Tubes*. J. Comp. Mat. 19 (1985), S. 525-532
- [67] Schröder, B.: *Untersuchungen zum Spannungs-Verformungs-Verhalten von UD-GFK bei Quer- und Quer/Längs-Beanspruchung*. Dipl.-Arbeit Univ. Gh. Kassel, Fachgebiet Faserverbundtechnik (Prof. Dr.-Ing. A. Puck) 1983
- [68] Nairn, J. A.; Hu, S.: *Matrix Microcracking* in: [17], S. 187-243
- [69] Puck, A.: *Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtverbund-Bauelementen*. Kunststoffe 57 (1967) 12, S. 965-973
- [70] Meier, U.; Müller, R.; Puck, A.: *GFK-Biegeträger unter quasistatischer und schwingender Beanspruchung*. Vortrag, 18. AVK-Tagung, Freudenstadt 1982, S. 35.1-35.7
- [71] Chou, T. W.; Ishikawa, T.: *Analysis and Modeling of Two-Dimensional Fabric Composites* in: Textile Structural Composites. T. W. Chou and F. K. Ko. eds., Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1989, S. 209-264
- [72] Coulomb, C. A.: *Sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a quelques Problemes de Statique, relatifs a l'Architecture*. Memoires de Mathematique et de Physique, Academie Royal des Sciences par divers Savans, Anné 1773, Paris, France, 1776
- [73] Griffith, A. A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A221 (1920), S. 163-198
- [74] Friedrich, K. (Hrsg.): *Application of Fracture Mechanics to Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam/Oxford/New York/Tokyo 1989
- [75] Hahn, H. T.; Erikson, J. B.; Tsai, S. W.: *Characterisation of Matrix/Interface-Controlled Strength of Unidirectional Composites* in: Fracture of Composite Materials. M. Nijhoff Publ. Den Haag, NL 1982, S. 197- 214
- [76] Paul, B.: *A Modification of the Coulomb Mohr Theory of Fracture*. J. Appl. Mech. June 1961, S. 259-286
- [77] Rechenprogramm zur Bruchkurven-Analyse (*Brukan*). Prof. Dr. R. Jeltsch-Fricker, Universität Gh Kassel, AG Ing.math.
- [78] *Rechenprogramm Brukan-Visual 3D zur Darstellung von Teil-Bruchflächen und Bruchwinkeln*. Prof. Dr.-Ing. A. Puck, Immenhausen u. Dipl.-Ing. D. Zeise, Stuttgart
- [79] BMBF-gefördertes Projekt: *Zum verbesserten Festigkeitsnachweis von Bauteilen aus Faser-Kunststoff- Verbunden*. Förderkennz. 03N8002

- [80] Leon, A.: *Über die Scherfestigkeit des Betons*. Beton und Eisen 34 (1935) 8, S. 130-135
- [81] Puck, A.: *Physikalisch begründete 3D-Bruchkriterien für UD-Verbunde*. Vortrag, Arbeitskreis "Neue Bruchkriterien". Universität Gh Kassel, AG Ing.math., 2. Juni 1993
- [82] Kress, G. R.: *Analytische und experimentelle Untersuchung zu Versagensvorgängen in Faserverbundwerkstoffen mit besonderer Berücksichtigung der Randeffekte*. Fortschr.-Ber. VDI R.18 Nr. 130, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993
- [83] Puck, A.; Schürmann, H.: *Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models*. Special Issue of Comp. Sc. and Techn. 1996, im Druck
- [84] Huybrechts, D.: *Ein erster Beitrag zur Verifikation des wirkebenebezogenen Zwischenfaserbruchkriteriums nach Puck*. Diss. R.W.T.H. Aachen 1996
- [85] Jeltsch-Fricke, R.: *Die Totraum-Problematik*. Vortrag im Rahmen des Projektes [79], Universität Gh Kassel, AG Ingenieurmathematik, 12. März 1994
- [86] Fabisch, S.; Puck, A.: *Vorüberlegungen zur Probabilistik bei wirkebenebezogenen Bruchbedingungen für UD-Faser/Matrix-Verbunde*. Unveröffentlichte Studie, Kassel 1995
- [87] Knappe, W.; Schneider, W.: *Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung*. Kunststoffe 62 (1972) 12, S. 864-868
- [88] Huth, H.: *Vorgehensweisen beim Betriebsfestigkeitsnachweis für Faserverbundbauteile*. Vortrag, 25. AVK-Tagung, Berlin 1993, S. B10.1-B10.8
- [89] Flaggs, D.L.; Kural, M.H.: *"Experimental Determination of the In Situ Transverse Lamina Strength in Graphite Epoxy Laminates"*. J. Comp. Mat. Vol. 16 (1982), S. 103-116
- [90] Peters, P. W. M.: *Die Festigkeit von Glas-, Aramid- und Kohlenstoff-Epoxyd senkrecht zur Faser*. Vortrag, 21. AVK-Tagung, Mainz 1987, S. 30.1-30.8
- [91] Hart-Smith, L.J.: *Persönliche Mitteilungen an den Autor*, August 1994
- [92] Gädke, M.: *Crack Initiation and Growth in Notched CFRE-Laminates*. Proc. Internat. Conf. Spacecr. Struct. and Mech. Testing. 24.-26. Apr. 1991 (ESA SP-321), Oct. 1991
- [93] Cuntze, R.G.: *Bruchtyp-Festigkeitskriterien, formuliert mit Invarianten, die die Werkstoffsymmetrie des jeweiligen iso-/anisotropen Werkstoffs beinhalten*. Vortr. 8. Worksh. Comp. Forsch. i. d. Mech., Lab. f. Techn. Mech., Univ. Paderborn, 5.-6. Dez. 1995
- [94] Stellbrink, K.K.U.: *Micromechanics of Composites*. Hanser, München/Wien 1996

13.2 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Wegen des grundlegenden Charakters der Arbeit werden durchweg Symbole benutzt, die sich an der heute vorherrschenden anglo-amerikanischen Fachsprache orientieren. Bei den betreffenden Symbolen ist jeweils im Text vermerkt, von welchem englischen Begriff sie sich herleiten.

Abkürzungen:

UD	unidirektional faserverstärkt
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
CFK	Kohlenstofffaser-Kunststoff
GFK	Glasfaser-Kunststoff
Fb	Faserbruch
Zfb	Zwischenfaserbruch
CLT	Classical Laminate Theory (klassische Laminat-Theorie)
CDS	Characteristic Damage State (charakteristischer Schädigungszustand)
FEM	Finite Elemente Methode
FPF	First Ply Failure (erste Schicht-Bruch)
LPF	Last Ply Failure (letzte Schicht-Bruch)

Koordinatensysteme:

x, y	Laminat-Koordinatensystem (in der Schichtebene)
x_H, y_H	Laminat-Koordinatensystem, bezogen auf die Richtung der Haupt-Normalspannungen bei ebener Beanspruchung in der Schichtebene
x_{1H}, x_{2H}, x_{3H}	Koordinatensystem in den Richtungen der Haupt-Normalspannungen bei räumlicher Beanspruchung
x_1, x_2, x_3	Schicht-Koordinatensystem (cartesisches Rechts-Koordinatensystem), x_1 parallel zur Faserrichtung, x_2 parallel zur Schichtebene, senkrecht zur Faserrichtung, x_3 in Dickenrichtung
x_1, x_{II}, x_{III}	auf die "Haupt-Normalspannungen" σ_{II} und σ_{III} (aus $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$) in einem Punkt der UD-Schicht bezogenes Koordinatensystem, x_1 parallel zur Faserrichtung, x_{II} in Richtung der "Haupt-Normalspannung" σ_{II} , x_{III} in Richtung der "Haupt-Normalspannung" σ_{III} .
x_1, x_n, x_t	auf eine faserverparallele Bruchebene bezogenes Koordinatensystem, x_1 parallel zur Faserrichtung, x_n senkrecht (normal) zur Schnittebene oder Bruchebene, x_t parallel zur Schnittebene oder Bruchebene, senkrecht (transversal) zur Faserrichtung.

Lateinische Formelzeichen:

e	Bruchdehnung oder Bruchstauchung (positiver Zahlenwert!)
E	Elastizitätsmodul
\mathcal{E}	Anstrengung (Ausnutzungsgrad)
f	Zahlenfaktor
F	Bruchfunktion
\tilde{F}	transformierte Bruchfunktion
G	Schubmodul
k	Nummer einer Schicht
K	Steifigkeitsmatrix
K^{-1}	Nachgiebigkeitsmatrix
m	Zahlenfaktor; Vergrößerungsfaktor
M	Feuchtegehalt
n	Kraftfluß, Schichtzahl eines Laminats, Exponent
p	Proportionalitätsfaktor bei σ_n , Neigungsmaß
r	Radius; Homogenitätsgrad
R	Festigkeit
R^A	Bruchwiderstand der Wirkebene
S	statisches Moment einer Fläche
t	Dicke
T	Temperatur
x, y, z	Koordinaten(richtungen)

Griechische Formelzeichen:

α	Winkel zwischen x-Richtung und Faserrichtung bei der Netztheorie oder Laminattheorie
γ	Schubwinkel
δ	Winkeldifferenz $\omega - \varphi$
Δ	Winkeldifferenz $\Theta_{fp}^{(-)} - 45^\circ$; relative Abweichung zwischen Modell und Versuch, Differenz
ε	Dehnung, (Stauchung: negativer Wert)
η	Abminderungsfaktor für Elastizitätsgrößen
θ	Winkel zwischen den Richtungen x_2 und x_n
Θ	Winkel zwischen den Richtungen x_{II} und x_n
κ	Faserkreuzungswinkel
λ	Zahlenfaktor
μ	Reibungsbeiwert
ν	Querkontraktionszahl (der 1. Index bezeichnet die Kontraktionsrichtung)
ρ	Winkel $\arctan \sigma_2 / \tau_{21} $
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung

φ	Winkel zwischen x_2 und x_{II}
Φ	Winkel zwischen x und x_H
ψ	Winkel $\arctan \tau_{n1}/\tau_{nt}$
Ψ	Winkel $\arctan \tau_{zy}/\tau_{zx}$
ω	Winkel $\arctan \tau_{31}/\tau_{21}$

Indizes:**hochgestellte Indizes:**

A	die Wirkebene von Spannungen betreffend
(+)	Zugbeanspruchung betreffend
(-)	Druckbeanspruchung betreffend
(I_f)	die Schichtgrenzfläche betreffend
(l)	lastbedingt
(r)	verspannungsbedingt (Eigenspannung)
\sim	über die Dicke eines Laminats gemittelt
*	auf einachsige $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung bezogen
**	auf zweiachsige, isotrope $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung bezogen

tiefgestellte Indizes:

\parallel	parallel zur Faserrichtung
\perp	quer zur Faserrichtung
$\perp\parallel$	Quer/Längs-...
$\perp\perp$	Quer/Quer-...
$\perp\psi$	Quer/ x_{ψ} -Richtung
a	außen
i	innen
d	degradiert (exponentiell)
D	Degradation (linearisiert)
F	Faser
M	Matrix
mod	Modell
Res	Reserve-...
red	reduziert
IFF	Zwischenfaserbruch
FF	Faserbruch
$mech$	mechanisch verursacht
$therm$	thermisch verursacht
thr	Schwellenwert
w	Schwächungs-...

13.3 Fachwortverzeichnis

Anstrengung: Zahlenwert zur Kennzeichnung des relativen Ausnutzungsgrades eines Werkstoffs hinsichtlich seiner Festigkeit

anisotrop: richtungsabhängig

Bruch: Werkstofftrennung durch Spannungseinwirkung

Bruchebene: bei einem Bruch entstehende Werkstoffoberfläche

Bruchfläche: Fläche im Spannungsraum, die alle ohne Bruch ertragbaren Spannungszustände umschließt

Bruchgefahr: Kurzform für schnittwinkelabhängige Anstrengung

Bruchhypothese: plausible Annahme über die Bruch verursachenden Zustände

Bruchkriterium: mathematische Beziehung, die ohne Bruch ertragbare Spannungszustände von solchen unterscheidet, die nicht ertragbar sind

Bruchmechanik: Teilgebiet der Mechanik, das sich mit der Rißentstehung an inneren Defekten und der Rißausbreitung in spröden Werkstoffen befaßt

Bruchwiderstand der Wirkebene: Widerstand einer Spannungs-Wirkebene gegen ihren Bruch infolge einer einzelnen in ihr wirkenden Normal- oder Schubspannung

Delamination: (örtliche) Schichtentrennung in einem Laminat

Degradation: Herabsetzung von Eigenschaften bei Überschreitung bestimmter Beanspruchungsgrenzen, z.B. der Zwischenfaserbruch-Grenze

Eigenspannungen: Spannungen, die ohne äußere Krafteinwirkung in einem Werkstoff oder Bauteil existieren

Elementarfasern: Einzelfaser (im Durchmesserbereich von 5 bis 50 μm)

Einzelschicht: schichtförmiger Bestandteil ("Bauelement") eines Laminats

Faserbruch: Bruch einer Einzelschicht, bei dem Zigtausende von Elementarfasern brechen

Festigkeit: Zahlenangabe über die von einem Werkstoff ohne Bruch (oder gravierende Veränderung, die seine Tragfähigkeit begrenzt) ertragen werden kann

Festigkeitsanalyse: Rechnerische Beschreibung der Bruchgrenzen und des Bruchverhaltens von Werkstoffen bei mehrachsiger Beanspruchung

Fehlstelle: ungewollte Unregelmäßigkeit (Hohlraum, Riß, Einschluß) in einem Werkstoff

homogen: 1. in bezug auf einen Werkstoff: Aus Gleichartigem aufgebaut. 2. in bezug auf eine Spannung: Über größere Bereiche relativ unveränderlich. 3. in bezug auf eine Funktion: Sie ist bezüglich bestimmter Variabler homogen vom Grad r , wenn bei Vergrößerung aller dieser Variablen mit dem Faktor λ aus der Funktion λ^r ausgeklammert werden kann

Hysterese: hier: Nichtzusammenfallen von Be- und Entlastungskurve in einem Kraft,Weg-Diagramm

isotrop: nicht richtungsabhängig

invariant: unveränderlich bei Veränderung des Koordinatensystems

- Invariante:** hier speziell: Funktion von Spannungen (z.B. Summe der Haupt-Normalspannungen), deren Wert nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängt
- Laminat:** hier: Schichtenverbund, bei dem die einzelnen Schichten unterscheidbar sind (z.B. durch unterschiedliche Faserrichtung)
- Laminatversagen:** Unbrauchbarwerden oder Bruch eines Laminats
- Laminat-Theorie:** Rechenverfahren zur Ermittlung der Spannungen und Verformungen der einzelnen Schichten eines Laminats und des Laminats als Ganzem
- Matrix:** Stoff, durch den Fasern zu einem Faser-Matrix-Verbund gefügt werden und der Kraftübertragung zwischen den Fasern ermöglicht
- Modell:** Vereinfachte theoretische Vorstellung von einem realen Vorgang, z.B. einem Bruchvorgang. Auch die entsprechende mathematische Formulierung wird gelegentlich als "Modell" bezeichnet
- Makromechanik:** hier: Betrachtungsweise, bei der die Einzelschichten als homogen angesehen werden
- Mikromechanik:** Betrachtungsweise im Größenbereich von μm , in der Faser- und Matrixbereiche unterschieden werden
- Mikroschädigungen:** Feinste (meist unsichtbare) Risse in Einzelschichten
- Mohrscher Kreis:** Graphische Konstruktion zur Ermittlung der Spannungen auf einer zu den Haupt-Normalspannungs-Richtungen schräg verlaufenden Schnittebene
- Nachgiebigkeiten:** Elastizitätsgrößen, durch die Verformungen mit Kräften gekoppelt sind
- Netztheorie:** Vereinfachte Laminattheorie, die das Mittragen der Matrix unberücksichtigt läßt
- Reservefaktor:** Faktor, mit dem Spannungen erhöht werden können, bevor Bruch eintritt
- Roving:** Strang aus einigen Tausend Elementarfasern
- Steifigkeiten:** Elastizitätsgrößen, durch die Kräfte mit Verformungen gekoppelt sind
- Streckungsfaktor:** Kurzform für schnittwinkelabhängige Anstrengung
- UD-Schicht:** unidirektional faserverstärkte Schicht aus Faser-Matrix-Verbund
- Wirkebene:** Schnittebene, auf der eine oder mehrere Spannungen wirken
- Widerstand der Wirkebene:** Widerstand (angegeben z.B. in N/mm^2), den eine Wirkebene ihrem Bruch durch eine einzelne in ihr wirkende Normal- oder Schubspannung entgegensetzt
- Verschmieren:** Theoretische Verwandlung eines Mediums mit Diskontinuitäten (wie z.B. Zwischenfaserrissen) in ein Kontinuum
- Wöhler-Kurve oder Wöhler Linie:** Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der beim Schwingfestigkeitsversuch wirksamen Beanspruchungshöhe und der Schwingspielzahl bis zum Bruch
- Zwischenfaserbruch:** zwischen Fasern verlaufender Bruch, der eine UD-Schicht auf ihrer gesamten Dicke durchtrennt

13.4 Stichwortverzeichnis

- A**
- Abminderungsfaktor 83ff
 - Album, elektronisches 166
 - analytische Lösungen 44
 - Anpassung an Versuchsergebnisse 63f
 - Anwendungsempfehlungen 158ff
 - Aufbau von Laminaten 11ff
 - ausgeglichener Winkelverbund 26
 - Ausknicken (von Fasern) 21
- B**
- Basisfestigkeiten 152
 - Bauteil-Entwurf 99
 - Beanspruchung des UD-Verbunds 4
 - Beanspruchungsarten 187ff
 - Begriffe 45ff
 - Beulen 29
 - Blinde Flecken 178ff, 184f
 - Bruchbedingung (Definition) 45f
 - Bruchdehnung 73
 - Bruchfunktion (Definition) 46
 - Bruchhypothese (Definition) 46
 - Bruchhypothese, erweiterte 112ff
 - Bruchkörper 67, 75ff, 165ff
 - Bruchkriterium (Definition) 45
 - Bruchmechanischer Hintergrund 110
 - Bruch-Modus 15ff, 83ff, 170
 - Bruchstauchung 73
 - Bruchwiderstand der Wirkebene 117ff
 - Bruchwinkel-Ermittlung 126ff
 - Bruchzähigkeit 110f
- C**
- charakteristischer Schädigungszustand (CDS) .. 14
 - Cosinus-Halbwelle 175ff
 - Coulombsche Hypothese 105, 116
- D**
- Damage Mechanics 9
 - Definitionen 45ff
 - Degradation 6, 81ff
 - Dehnungsenergie-Freisetzungsrate 110f
 - Dehnungs-Überhöhung 68
 - Delamination 18ff
 - Delaminations-Bedingung 150ff
 - Delaminationsgefahr 91ff
 - dickwandig 44
 - Drehrohrfeder 12, 15, 17f
 - Druckbruch 23
 - "dünne Schicht"-Effekt 191f
- E**
- Eigenspannungen 38f, 78ff, 156ff
 - Elastizitätsgesetz 37
 - elektronisches Album 166
 - Evolutionsgesetz 84
- F**
- Faserbruch 6, 21ff
 - Faserbruch-Bedingungen 53, 56, 71ff
 - Festigkeiten 4, 116ff
 - Festigkeitsparameter 116ff
 - Feuchtekonzentration 78
 - First Ply Failure (FPL) 9
 - Flußdiagramm 92
- H**
- Hashin's Idee* 107
 - Haupt-Normalspannungen 132f
 - Hoffmann*-Bruchbedingungen 47
 - Hüll-Linie 55
 - Hybrid-Laminat 13
 - Hysterese 5
- I**
- Impact 190f
 - "in situ"-Effekt 191f
 - Interaktion 142ff
 - interlaminare Spannungen 20, 40ff
 - Interpolationsformel 147, 150
 - intralaminare Spannungen 20
 - invariant 53
 - Invarianten 196
 - Isochromaten 68
 - Iteration 36
- K**
- Keilwirkung 27f
 - Kerbwirkung 188ff
 - kinking 21f
 - kommerzielle Rechenprogramme 9
 - Kontinuumstheorie 82
 - Knicken, inneres 21f
 - Kraftfluß 31f
- L**
- Laminat-Theorie 35ff
 - Laminatversagen 23ff, 95
 - Lastfälle 23f

Lastpfad	78	Schubknicken	21f
Last Ply Failure (LPF)	102	Schubkorrektur	73f
Linearer Ansatz	138ff	Schwächungsfaktor	69, 153ff
		Schwingende Beanspruchung	191ff
M		Sekantenmodul	36f
Master Bruchfläche	109	Sensitivität des Bruchwinkels	178
"Menschliche" Probleme	192f	Spannungsanalyse	30ff
Mikromechanik	3	Spannungsintensitätsfaktoren	110f
Mikroschädigung	5, 39	Spannungsüberhöhung	68
Mode I, II, III	110f	Spannungs, Verzerrungs-Diagramme	5, 86
Modus	s. Bruch-Modus	Sprenghwirkung	23f
Mohrsche Hypothese	60, 107	Sprödbbruch	105
Mohrscher Kreis	139f, 174f	Stoßbeanspruchung	190
		Streckungsfaktor	126f
		Sukzessives Bruchgeschehen	6
		Symmetrischer Laminataufbau	13
N		T	
Nach-Bruch-Theorien	85	Tangentenmodul	36f
Neigungs-Parameter	122f	Tsai, Wu-Bruchbedingung	55
Nicht-Linearität	35ff	Transformationsformel	108
Nürnberger Schere	24	transversal-isotrop	52
		Toter Raum	178ff, 184f
O		U	
Optimierung	101	Überanstrengung	84f
Organisatorische Probleme	192f	Überschreitungsgrad	84f
P		V	
Parabolischer Ansatz	140ff	Vektorenfächer	173ff
Parallelogrammgestänge	25f	Vereinfachung bei	
Prepreg	13	2D-Beanspruchung	161ff
Probabilistik	181ff	Verformungsverhalten	91
		Verspannung zwischen	
		Fasern und Matrix	67f
		Visualisierung	49ff
Q		W	
quasi-linear-elastisch	36	Wickeltechnik	11f
Querkontraktion (s Zahl)	72, 83f	Winkelwahl	32f
		Wirkebene	50
		Wirkebene-Bruchwiderstand	117ff
R		Z	
Radienverhältnis	12	Zacharov-Bruchbedingung	55
Reservefaktor	51	Zukunftsaussichten	195f
Resttragfähigkeit	95	Zwischenfaserbruch	5, 14ff
Ringfadenaue	11	Zwischenfaser-Bruchbedingung	59ff
		Zwischenfaser-Risse	5
S			
Sandwichereffekt	13		
Schädigungshypothese	5		
Schädigungsmechanik	9		
Schlagbeanspruchung	190f		
Schnelle Programme	99		
Schubfluß	31		

Dieses Werk stellt erstmalig eine ingenieurmäßige Festigkeitsanalyse der Faserverbund-Lamine in geschlossener Form dar. Die Rechenmodelle sind so einfach gehalten, daß sie problemlos in der Konstruktionspraxis eingesetzt werden können; dennoch geben sie das vielgestaltige physikalische Bruchgeschehen richtig wieder.

Der Autor, der sein fundiertes Wissen abwechselnd in der Industriepraxis und in der Grundlagenforschung erwarb, verbindet hier den Aspekt der Praxisnähe mit der physikalischen Korrektheit.

Das Buch führt in didaktisch hervorragender Form vom Laminataufbau über Hinweise zur Spannungsanalyse und die ausführliche Darstellung praxisbewährter Methoden der Festigkeitsanalyse bis an die Front der Forschung, wo eine unkonventionelle Betrachtungsweise zu überraschenden Einsichten und neuen Möglichkeiten führt. Und ganz nebenbei erfährt der Leser eine Menge aus der Trickkiste eines Pioniers der Faserverbundtechnik.

Eine gute Festigkeitstheorie hilft, die Entwicklungszeiten und -kosten bei Faserverbundbauteilen erheblich zu verringern.